Revisitando o 4° Problema de Hilbert

Lucas Ambrozio

IMPA

OctoberMat - PUC-Rio
27 de Outubro de 2022

Uma proposição em Geometria Euclidiana

Sejam A, B e C três pontos distintos no plano.

Uma proposição em Geometria Euclidiana

Sejam A, B e C três pontos distintos no plano.

Se A, B e C não são colineares, então

$$|\overline{AC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$

Caminhos mais curtos

Caminhos mais curtos

Caminho unindo o ponto A ao ponto C: aplicação contínua

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{com} \quad \gamma(0) = A \quad \text{e} \quad \gamma(1) = C.$$

Caminhos mais curtos

Caminho unindo o ponto A ao ponto C: aplicação contínua

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{com} \quad \gamma(0) = A \quad \text{e} \quad \gamma(1) = C.$$

Comprimento do caminho:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} |\overline{\gamma(s_{i-1})\gamma(s_i)}|,$$

onde $\mathcal{P} = \{s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1\}$ é partição finita do intervalo $[0,1]$ (com número arbitrário n de pontos).

Caminhos mais curtos

Caminho unindo o ponto A ao ponto C: aplicação contínua

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{com} \quad \gamma(0) = A \quad \text{e} \quad \gamma(1) = C.$$

Comprimento do caminho:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} |\overline{\gamma(s_{i-1})\gamma(s_i)}|,$$

onde $\mathcal{P} = \{s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1\}$ é partição finita do intervalo $[0,1]$ (com número arbitrário n de pontos).

Observação: se γ é suave, então $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$.

Caminhos mais curtos

Caminho unindo o ponto A ao ponto C: aplicação contínua

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \text{com} \quad \gamma(0) = A \quad \text{e} \quad \gamma(1) = C.$$

Comprimento do caminho:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} |\overline{\gamma(s_{i-1})\gamma(s_i)}|,$$

onde $\mathcal{P} = \{s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1\}$ é partição finita do intervalo $[0,1]$ (com número arbitrário n de pontos).

Observação: se γ é suave, então $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)|ds$.

Logo, se $B = \gamma(s)$ não é colinear a A e C, então

$$|\overline{AC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}| \leq \mathcal{L}(\gamma).$$

‘

Para além do plano...

Portanto: segmentos de reta no plano Euclidiano minimizam o comprimento de caminhos ligando suas extremidades.

Para além do plano...

Portanto: segmentos de reta no plano Euclidiano minimizam o comprimento de caminhos ligando suas extremidades.

Perguntas: imagine uma superfície suave S em $\mathbb{R}^3$.

Para além do plano...

Portanto: segmentos de reta no plano Euclidiano minimizam o comprimento de caminhos ligando suas extremidades.

Perguntas: imagine uma superfície suave S em $\mathbb{R}^3$.

i) Como definir distância entre dois pontos A e B em S?

Para além do plano...

Portanto: segmentos de reta no plano Euclidiano minimizam o comprimento de caminhos ligando suas extremidades.

Perguntas: imagine uma superfície suave S em $\mathbb{R}^3$.

i) Como definir distância entre dois pontos A e B em S?

Proposta: $d(A, B)$ ínfimo do comprimento de caminhos dentro de S unindo A a B.

Para além do plano...

Portanto: segmentos de reta no plano Euclidiano minimizam o comprimento de caminhos ligando suas extremidades.

Perguntas: imagine uma superfície suave S em $\mathbb{R}^3$.

i) Como definir distância entre dois pontos A e B em S?

Proposta: $d(A, B)$ ínfimo do comprimento de caminhos dentro de S unindo A a B.

ii) Quais são os caminhos mais curtos entre dois pontos?

Cálculo das Variações - I

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X}$ = espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X} =$ espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)|ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X} =$ espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Se $\overline{\gamma} \in \mathbb{X}$ é tal que $\mathcal{L}(\overline{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{X}$, então...

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X}$ = espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Se $\overline{\gamma} \in \mathbb{X}$ é tal que $\mathcal{L}(\overline{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{X}$, então...

... para toda família γ_t em $\mathbb{X}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\mathcal{L}(\gamma_t) \geq \mathcal{L}(\overline{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma_0) \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X} =$ espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Se $\overline{\gamma} \in \mathbb{X}$ é tal que $\mathcal{L}(\overline{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{X}$, então...

... para toda família γ_t em $\mathbb{X}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\mathcal{L}(\gamma_t) \geq \mathcal{L}(\overline{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma_0) \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

E, portanto, para toda família suave γ_t em $\mathbb{X}$ com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$,

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X} =$ espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Se $\overline{\gamma} \in \mathbb{X}$ é tal que $\mathcal{L}(\overline{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{X}$, então...

... para toda família γ_t em $\mathbb{X}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\mathcal{L}(\gamma_t) \geq \mathcal{L}(\overline{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma_0) \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

E, portanto, para toda família suave γ_t em $\mathbb{X}$ com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \mathcal{L}(\gamma_t) = 0$$

Cálculo das Variações - I

$\mathbb{X}$ = espaço dos caminhos suaves em S unindo A a B.

$\mathcal{L} : \gamma \in \mathbb{X} \mapsto \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \in [0, +\infty)$ funcional comprimento.

Se $\overline{\gamma} \in \mathbb{X}$ é tal que $\mathcal{L}(\overline{\gamma}) \leq \mathcal{L}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{X}$, então...

... para toda família γ_t em $\mathbb{X}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\mathcal{L}(\gamma_t) \geq \mathcal{L}(\overline{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma_0) \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

E, portanto, para toda família suave γ_t em $\mathbb{X}$ com $\gamma_0 = \overline{\gamma}$, temos

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{L}(\gamma_t) = 0 \quad \left(\text{e} \quad \frac{d^2}{d^2 t}_{|t=0} \mathcal{L}(\gamma_t) \geq 0 \right).$$

Cálculo das Variações - II

Fórmula da Primeira Variação do Comprimento:

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}}\mathcal{L}(\gamma_t) = -\int_0^1 \langle V(s), \vec{k_g}(s)\rangle ds$$

Cálculo das Variações - II

Fórmula da Primeira Variação do Comprimento:

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \mathcal{L}(\gamma_t) = -\int_0^1 \langle V(s), \vec{k_g}(s) \rangle ds$$

onde

$$V(s) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \gamma_t(s) \in T_{\overline{\gamma}(s)} S \quad \text{para todo} \quad s \in [0, 1]$$

é o campo variacional.

Cálculo das Variações - II

Fórmula da Primeira Variação do Comprimento:

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \mathcal{L}(\gamma_t) = -\int_0^1 \langle V(s), \vec{k_g}(s) \rangle ds$$

onde

$$V(s) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \gamma_t(s) \in T_{\overline{\gamma}(s)}S \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]$$

é o campo variacional. (Observe: $V(0) = V(1) = 0$),

Cálculo das Variações - II

Fórmula da Primeira Variação do Comprimento:

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \mathcal{L}(\gamma_t) = -\int_0^1 \langle V(s), \vec{k_g}(s) \rangle ds$$

onde

$$V(s) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \gamma_t(s) \in T_{\overline{\gamma}(s)} S \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]$$

é o campo variacional. (Observe: $V(0) = V(1) = 0$), e

$$\begin{aligned} \vec{k_g}(s) &= \text{ vetor curvatura geodésica de } \overline{\gamma} \\ &= \overline{\gamma}''(s)^{T_{\overline{\gamma}(s)} S} \text{ se } |\overline{\gamma}'| \equiv 1. \end{aligned}$$

Cálculo das Variações - II

Fórmula da Primeira Variação do Comprimento:

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \mathcal{L}(\gamma_t) = -\int_0^1 \langle V(s), \vec{k_g}(s) \rangle ds$$

onde

$$V(s) = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \gamma_t(s) \in T_{\overline{\gamma}(s)}S \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]$$

é o campo variacional. (Observe: $V(0) = V(1) = 0$), e

$$\begin{aligned} \vec{k_g}(s) &= \text{ vetor curvatura geodésica de } \overline{\gamma} \\ &= \overline{\gamma}''(s)^{T_{\overline{\gamma}(s)}S} \text{ se } |\overline{\gamma}'| \equiv 1. \end{aligned}$$

Observe: V é campo tangente arbitrário, com $V(0) = V(1) = 0$.

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

... *nem sempre existem caminhos mais curtos!*

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

... *nem sempre existem caminhos mais curtos!*

Exemplo: plano menos um ponto.

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

... *nem sempre existem caminhos mais curtos!*

Exemplo: plano menos um ponto.

(Mas isto nunca acontece quando S é compacta, como a esfera!)

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

... *nem sempre existem caminhos mais curtos!*

Exemplo: plano menos um ponto.

(Mas isto nunca acontece quando S é compacta, como a esfera!)

... *e nem toda geodésica minimiza a distância!*

Dois cuidados

Portanto: caminhos mais curtos são curvas geodésicas ($\vec{k_g} \equiv 0$).

Porém...

... *nem sempre existem caminhos mais curtos!*

Exemplo: plano menos um ponto.

(Mas isto nunca acontece quando S é compacta, como a esfera!)

... *e nem toda geodésica minimiza a distância!*

Exemplo: nas esfera Euclidiana, as geodésicas são grandes círculos.

Um resultado de Eugenio Beltrami - I

Em 1865, E. Beltrami publicou um artigo intitulado:

Um resultado de Eugenio Beltrami - I

Em 1865, E. Beltrami publicou um artigo intitulado:

Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.

Um resultado de Eugenio Beltrami - I

Em 1865, E. Beltrami publicou um artigo intitulado:

Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.

Pergunta motivadora: pode-se encontrar cartas locais para superfícies de modo que suas geodésicas sejam representadas por segmentos de reta?

Um resultado de Eugenio Beltrami - I

Em 1865, E. Beltrami publicou um artigo intitulado:

Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.

Pergunta motivadora: pode-se encontrar cartas locais para superfícies de modo que suas geodésicas sejam representadas por segmentos de reta?

Exemplo: projeção central da esfera Euclidiana.

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso...

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso... apenas sob condições muito especiais!

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso... apenas sob condições muito especiais!

Em particular, a menos de bijeções afins de $\mathbb{R}^2$,

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso... apenas sob condições muito especiais!

Em particular, a menos de bijeções afins de $\mathbb{R}^2$, a primeira forma fundamental nesta carta se representa por

$$R^2 \frac{(a^2+v^2)du^2 - 2uvdudv + (a^2+u^2)dv^2}{(a^2+u^2+v^2)^2}$$

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso... apenas sob condições muito especiais!

Em particular, a menos de bijeções afins de $\mathbb{R}^2$, a primeira forma fundamental nesta carta se representa por

$$R^2 \frac{(a^2+v^2)du^2 - 2uvdudv + (a^2+u^2)dv^2}{(a^2+u^2+v^2)^2}$$

... onde a e R são constantes não-nulas,

Um resultado de Eugenio Beltrami - II

Resposta: certamente se S é localmente isométrica ao plano, mas além disso... apenas sob condições muito especiais!

Em particular, a menos de bijeções afins de $\mathbb{R}^2$, a primeira forma fundamental nesta carta se representa por

$$R^2 \frac{(a^2+v^2)du^2 - 2uvdudv + (a^2+u^2)dv^2}{(a^2+u^2+v^2)^2}$$

... onde a e R são constantes não-nulas, e a curvatura Gaussiana é dada portanto por

$$K = \frac{1}{R^2} \quad \text{(constante!)}.$$

Descoberta de um modelo de plano hiperbólico!

Em 1868, Beltrami publicou sua famosa monografia sobre Geometria não-Euclidiana (ou Hiperbólica)...

Descoberta de um modelo de plano hiperbólico!

Em 1868, Beltrami publicou sua famosa monografia sobre Geometria não-Euclidiana (ou Hiperbólica)...

Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

Descoberta de um modelo de plano hiperbólico!

Em 1868, Beltrami publicou sua famosa monografia sobre Geometria não-Euclidiana (ou Hiperbólica)...

Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

Modelo: disco unitário $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, munido da métrica (Riemanniana)

$$\frac{(1 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (1 - u^2)dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

Descoberta de um modelo de plano hiperbólico!

Em 1868, Beltrami publicou sua famosa monografia sobre Geometria não-Euclidiana (ou Hiperbólica)...

Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

Modelo: disco unitário $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, munido da métrica (Riemanniana)

$$\frac{(1 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (1 - u^2)dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

As retas nesta geometria são... as cordas do disco.

Descoberta de um modelo de plano hiperbólico!

Em 1868, Beltrami publicou sua famosa monografia sobre Geometria não-Euclidiana (ou Hiperbólica)...

Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

Modelo: disco unitário $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, munido da métrica (Riemanniana)

$$\frac{(1 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (1 - u^2)dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

As retas nesta geometria são... as cordas do disco.

Observe: elas tem comprimento infinito!

O problema VI de David Hilbert - I

"IV. Problem of the straight line as the shortest distance between two points."

O problema VI de David Hilbert - I

“IV. Problem of the straight line as the shortest distance between two points.”

”Another problem relating to the foundations of geometry is this: (...) Whether from other suggestive standpoints geometries may not be devised which, with equal right, stand next to euclidean geometry. Here I should like to direct your attention to a theorem which has, indeed, been employed by many authors as a definition of a straight line, viz., that the straight line is the shortest distance between two points (...). The theorem of the straight line as the shortest distance between two points (...) play an important part not only in number theory but also in the theory of surfaces and in the calculus of variations. For this reason, (...) the construction and systematic treatment of the geometries here possible seem to me desirable”.

O Problema VI de David Hilbert - II

Na versão em francês, mais um parágrafo!

O Problema VI de David Hilbert - II

Na versão em francês, mais um parágrafo!

"Dans le cas du plan et en admettant l'axiome de continuité, le problème dont il s'agit conduit à la question traitée par M. Darboux: Déterminer tous les problèmes du Calcul des variations dans le plan où les solutions sont toutes les droites du plan; question qui me semble susceptible et digne de généralisations fécondes et intéressantes".

Interpretação

Geometria = Riemanniana? Finsleriana? Espaços métricos?...

Interpretação

Geometria = Riemanniana? Finsleriana? Espaços métricos?...

Soluções bastante gerais foram obtidas ao longo do século passado, destacando-se as contribuições de Hamel, Busemann, Pogorelov.

Interpretação

Geometria = Riemanniana? Finsleriana? Espaços métricos?...

Soluções bastante gerais foram obtidas ao longo do século passado, destacando-se as contribuições de Hamel, Busemann, Pogorelov.

Uma interpretação possível no contexto Riemanniano:

Interpretação

Geometria = Riemanniana? Finsleriana? Espaços métricos?...

Soluções bastante gerais foram obtidas ao longo do século passado, destacando-se as contribuições de Hamel, Busemann, Pogorelov.

Uma interpretação possível no contexto Riemanniano:

i) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos de $\mathbb{R}^n$ tais que suas geodésicas são retas; ou

ii) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos da esfera S^n tais que suas geodésicas são grandes círculos.

Interpretação

Geometria = Riemanniana? Finsleriana? Espaços métricos?...

Soluções bastante gerais foram obtidas ao longo do século passado, destacando-se as contribuições de Hamel, Busemann, Pogorelov.

Uma interpretação possível no contexto Riemanniano:

i) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos de $\mathbb{R}^n$ tais que suas geodésicas são retas; ou

ii) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos da esfera S^n tais que suas geodésicas são grandes círculos.

Mas estes problemas já estavam resolvidos por E. Beltrami (e L. Schäfli): são métricas com curvatura seccional constante ($\forall n \geq 2$).

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas $\leftrightarrow$ curvas com $\vec{k_g} = 0$

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas $\leftrightarrow$ curvas com $\vec{k_g} = 0$ $\leftrightarrow$ pontos críticos do funcional comprimento por variações de suporte compacto.

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas $\leftrightarrow$ curvas com $\vec{k_g} = 0$ $\leftrightarrow$ pontos críticos do funcional comprimento por variações de suporte compacto.

e

pontos críticos do funcional área por variações de suporte compacto

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas $\leftrightarrow$ curvas com $\vec{k_g} = 0 \leftrightarrow$ pontos críticos do funcional comprimento por variações de suporte compacto.

e

pontos críticos do funcional área por variações de suporte compacto $\leftrightarrow$ subvariedades com $\vec{H_g} = 0$

Subvariedades mínimas

Recapitulando: na geometria dada por métrica Riemanniana g em uma variedade n-dimensional M,

geodésicas $\leftrightarrow$ curvas com $\vec{k_g} = 0 \leftrightarrow$ pontos críticos do funcional comprimento por variações de suporte compacto.

e

pontos críticos do funcional área por variações de suporte compacto $\leftrightarrow$ subvariedades com $\vec{H_g} = 0 \leftrightarrow$ subvariedades mínimas

Um novo problema

Fixado números naturais n e $1 < k < n$,

Um novo problema

Fixado números naturais n e $1 < k < n$,

i) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos de $\mathbb{R}^n$ tais que os k-planos são mínimos; ou

ii) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos da esfera S^n tais que os k-equadores são mínimos.

Um novo problema

Fixado números naturais n e $1 < k < n$,

i) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos de $\mathbb{R}^n$ tais que os k-planos são mínimos; ou

ii) classificar as métricas Riemannianas em abertos conexos da esfera S^n tais que os k-equadores são mínimos.

Curiosamente... os primeiros artigos sobre o assunto apareceram apenas na década de 1990! Começando com a observação feita por M. Bekkar que os planos em $\mathbb{R}^3$ são mínimos com respeito a métrica (homogênea) de Heisenberg em $\mathbb{R}^3$:

$$dx^2 + dy^2 + (dz + ydx - xdy)^2.$$

Alguns resultados em $\mathbb{R}^n$

M. Bekkar: classificação de exemplos axi-simétricos.

Alguns resultados em $\mathbb{R}^n$

M. Bekkar: classificação de exemplos axi-simétricos.

M. Bekkar, R. Bryant: linearização da condição em *can* em dimensão $(n, k) = (3, 2)$ dá origem a espaço vetorial com dim=20.

Alguns resultados em $\mathbb{R}^n$

M. Bekkar: classificação de exemplos axi-simétricos.

M. Bekkar, R. Bryant: linearização da condição em *can* em dimensão $(n, k) = (3, 2)$ dá origem a espaço vetorial com dim=20.

Th. Hangan (1996):

i) se $1 < k < n - 1$ então a métrica tem curvatura seccional constante.

Alguns resultados em $\mathbb{R}^n$

M. Bekkar: classificação de exemplos axi-simétricos.

M. Bekkar, R. Bryant: linearização da condição em *can* em dimensão $(n, k) = (3, 2)$ dá origem a espaço vetorial com dim=20.

Th. Hangan (1996):

i) se $1 < k < n - 1$ então a métrica tem curvatura seccional constante.

ii) se $k = n - 1$, então...

Alguns resultados em $\mathbb{R}^n$

M. Bekkar: classificação de exemplos axi-simétricos.

M. Bekkar, R. Bryant: linearização da condição em *can* em dimensão $(n, k) = (3, 2)$ dá origem a espaço vetorial com dim=20.

Th. Hangan (1996):

i) se $1 < k < n - 1$ então a métrica tem curvatura seccional constante.

ii) se $k = n - 1$, então... classificação!

A classificação

Teorema (-, Marques, Neves)

Existe uma bijeção $GL(n+1)$-equivariante

$$\{\textit{métricas Riem. em } S^n \textit{ com todos os } (n-1)\textit{-equadores mínimos}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\textit{tensores de curvatura algébricos em } \mathbb{R}^{n+1} \textit{ com sec} > 0\}.$$

Fato: o segundo conjunto é cone aberto em espaço de dimensão finita $n(n+1)^2(n+2)/12$

A classificação

Teorema (-, Marques, Neves)

Existe uma bijeção $GL(n+1)$-equivariante

$$\left\{\textit{métricas Riem. em } S^n \textit{ com todos os } (n-1)\textit{-equadores mínimos}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\textit{tensores de curvatura algébricos em } \mathbb{R}^{n+1} \textit{ com sec} > 0\right\}.$$

Fato: o segundo conjunto é cone aberto em espaço de dimensão finita $n(n+1)^2(n+2)/12$ ($= 20$ quando $n = 3$).

Consequências geométricas

Todo tensor de curvatura algébrico em $\mathbb{R}^{n+1}$ é invariante pela aplicação antípoda...

Consequências geométricas

Todo tensor de curvatura algébrico em $\mathbb{R}^{n+1}$ é invariante pela aplicação antípoda...

> *... o que implica que toda métrica Riemanniana em S^n com equadores mínimos é analítica e invariante pela antípoda.*

Consequências geométricas

Todo tensor de curvatura algébrico em $\mathbb{R}^{n+1}$ é invariante pela aplicação antípoda...

... o que implica que toda métrica Riemanniana em S^n com equadores mínimos é analítica e invariante pela antípoda.

Em dimensão 3, há outras esferas mínimas?

... pelo teorema de unicidade de Gálvez-Mira, esferas mínimas imersas são mergulhadas e iguais a um dos equadores.

Consequências geométricas

Todo tensor de curvatura algébrico em $\mathbb{R}^{n+1}$ é invariante pela aplicação antípoda...

... o que implica que toda métrica Riemanniana em S^n com equadores mínimos é analítica e invariante pela antípoda.

Em dimensão 3, há outras esferas mínimas?

... pelo teorema de unicidade de Gálvez-Mira, esferas mínimas imersas são mergulhadas e iguais a um dos equadores.

Isometrias mandam subvar. mínimas em subvar. mínimas...

... o grupo de isometria de um (S^3, g) com todas as esferas mínimas é formado por transformações $p \mapsto Tx/|Tx|$, $T \in GL(\mathbb{R}^{n+1})$.

Exemplos interessantes

L. Green (1963) mostrou que métricas Zoll invariantes pela aplicação antípoda em S^2 necessariamente têm curvatura Gaussiana constante positiva...

... exibimos métricas invariantes pela aplicação antípoda em S^n, para todo $n \geq 3$, que não são homogêneas e com respeito às quais todos os $(n-1)$-equadores são mínimos.
(-, Marques, Neves, 2021)

Exemplos interessantes

L. Green (1963) mostrou que métricas Zoll invariantes pela aplicação antípoda em S^2 necessariamente têm curvatura Gaussiana constante positiva...

... exibimos métricas invariantes pela aplicação antípoda em S^n, para todo $n \geq 3$, que não são homogêneas e com respeito às quais todos os $(n-1)$-equadores são mínimos.
(-, Marques, Neves, 2021)

S.T. Yau perguntou se existem métricas em S^3 com curvatura de Ricci positiva e grupo de isometrias discreto contendo famílias suaves de superfícies mínimas compactas mergulhadas...

... exibimos métricas em S^3, arbitrariamente próximas da métrica canônica e com grupo de isometria discreto, que contém famílias suaves a três parâmetros de esferas mínimas mergulhadas.
(-, Marques, Neves, 2021)

Perspectivas

·) Exemplos isometricamente mergulhados em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$?

Perspectivas

·) Exemplos isometricamente mergulhados em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$?

·) Geometria dos exemplos?

Perspectivas

·) Exemplos isometricamente mergulhados em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$?

·) Geometria dos exemplos?

·) Problemas análogos para outras famílias distinguidas de subvariedades que são pontos críticos de outro funcional geométrico?

Perspectivas

- Exemplos isometricamente mergulhados em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$?

- Geometria dos exemplos?

- Problemas análogos para outras famílias distinguidas de subvariedades que são pontos críticos de outro funcional geométrico?

- Problemas análogos em outros espaços contendo outros tipos de famílias distinguidas de subvariedades mínimas?

Muito obrigado!