Problemas do tipo Ramsey

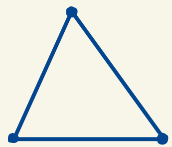
Taísa Martins (UFF)

XIX Oktobermat - PUC

Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

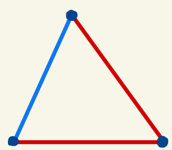
3 pessoas ?



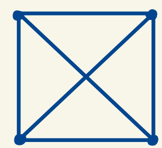
Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

3 pessoas?



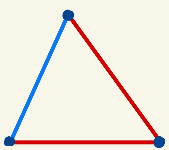
4 pessoas?



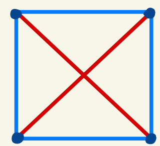
Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

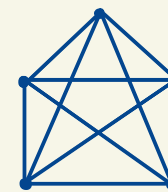
3 pessoas ? ∅



4 pessoas ? ∅



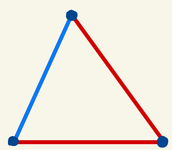
5 pessoas ?



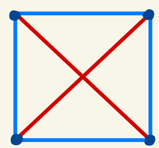
Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

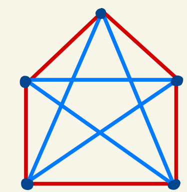
3 pessoas ?



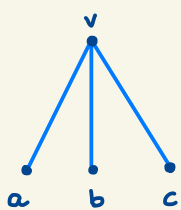
4 pessoas ?



5 pessoas ?



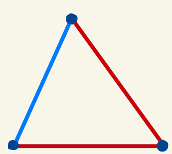
6 pessoas ?



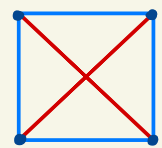
Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

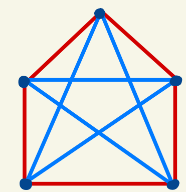
3 pessoas? ✗



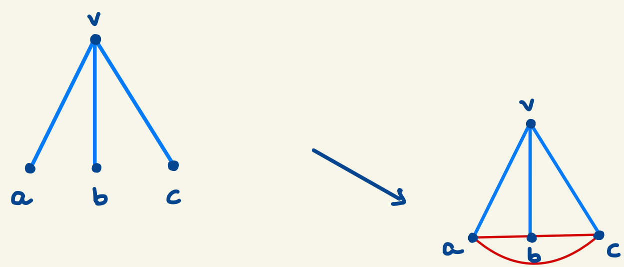
4 pessoas? ✗



5 pessoas? ✗



6 pessoas? ✓

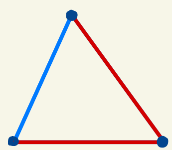


a, b, c não se conhecem!

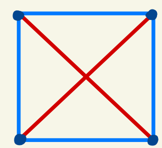
Números de Ramsey

Qual a <u>menor quantidade</u> de pessoas em um grupo tal que sempre <u>existem 3 pessoas que se conhecem</u> ou <u>3 pessoas que não se conhecem</u>?

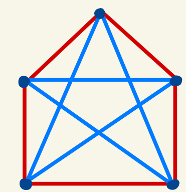
3 pessoas?



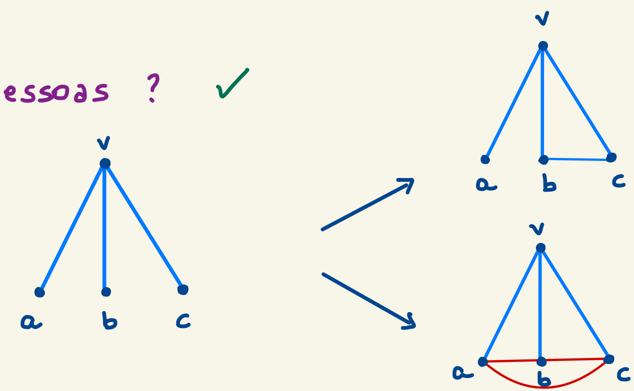
4 pessoas?



5 pessoas?



6 pessoas? ✓



v, b, c se conhecem!

a, b, c não se conhecem!

Teoria de grafos

todos os subconj. de V de tam. 2.

Um grafo consiste em um par (V, E) tal que $E \subseteq \binom{V}{2}$

conj. de vértices   conj. de arestas

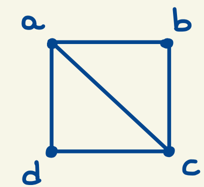
ex.:

$G = (V, E)$ onde

$V = \{a, b, c, d\} = V(G)$

$E = \{ab, bc, cd, ad, ac\} = E(G)$

G:



Teoria de grafos

Um **grafo** consiste em um par (V, E) tal que $E \subseteq \binom{V}{2}$ → todos os subconj. de V de tam. 2.

V → conj. de **vértices**; E → conj. de **arestas**

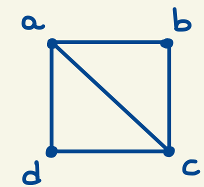
ex.:

$G = (V, E)$ onde

$V = \{a, b, c, d\} = V(G)$

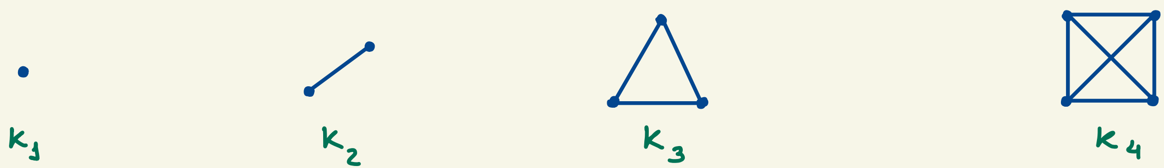
$E = \{ab, bc, cd, ad, ac\} = E(G)$

G:



Um grafo $G = (V, E)$ é dito **completo** se $E = \binom{V}{2}$. Além disso, denotamos por K_n um **grafo completo de n vértices**.

ex.:



Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

6 pessoas!

Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

6 pessoas!

Qual o menor n tal que em qualquer coloração das arestas do K_n com 2 cores temos um K_3 monocromático? $n = 6$

Números de Ramsey

Qual a menor quantidade de pessoas em um grupo tal que sempre existem 3 pessoas que se conhecem ou 3 pessoas que não se conhecem?

6 pessoas!

Qual o menor n tal que em qualquer coloração das arestas do K_n com 2 cores temos um K_3 monocromático? $n = 6$

Qual o menor n tal que em qualquer coloração das arestas do K_n com 2 cores temos um K_k monocromático?

↳ $R(k)$: número Ramsey de ordem k

Números de Ramsey

Qual o menor n tal que em qualquer coloração das arestas do K_n com 2 cores temos um K_k monocromático?

↳ $R(k)$: número Ramsey de ordem k

$k = 3$ $\quad$ $R(3) = 6$

$k = 4$ $\quad$ $R(4) = 18$

$k = 5$ $\quad$ $43 \leq R(5) \leq 48$

$k = 6$ $\quad$ $102 \leq R(6) \leq 165$

k $\quad$ $? \leq R(k) \leq ?$

Números de Ramsey

colocação com 2 cores

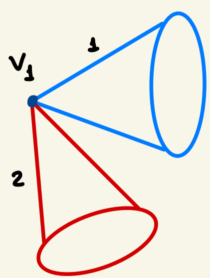
Ramsey '30 $\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:

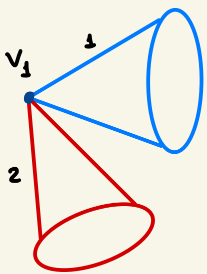


Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:



$\geq \frac{n-1}{2}$

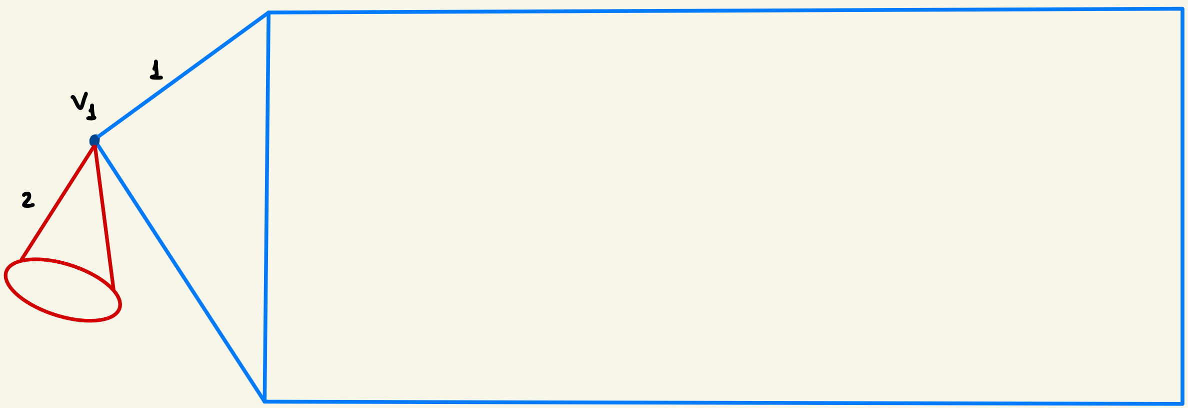
Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:

$\geq \frac{n-1}{2}$

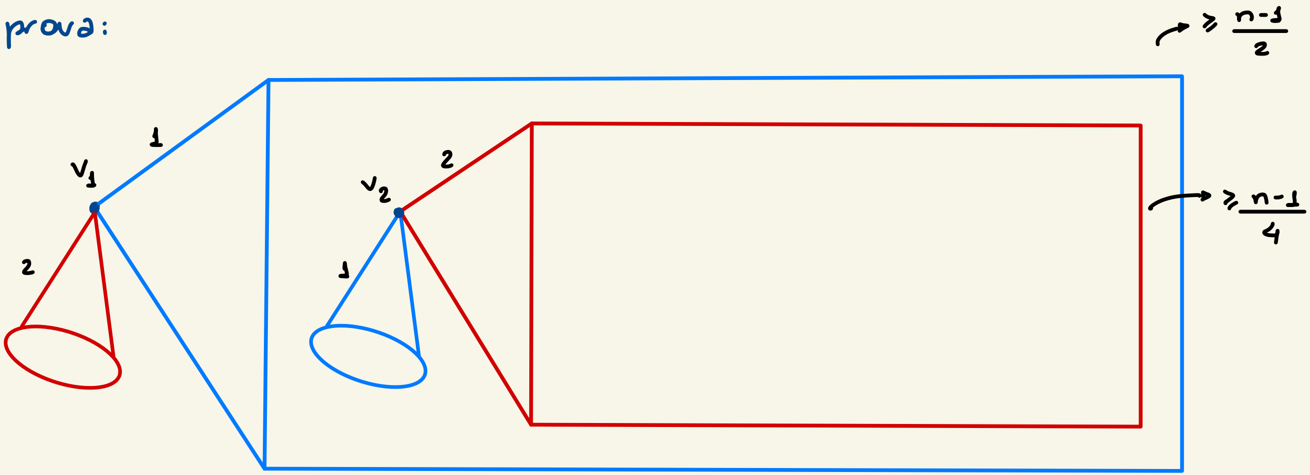


Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:

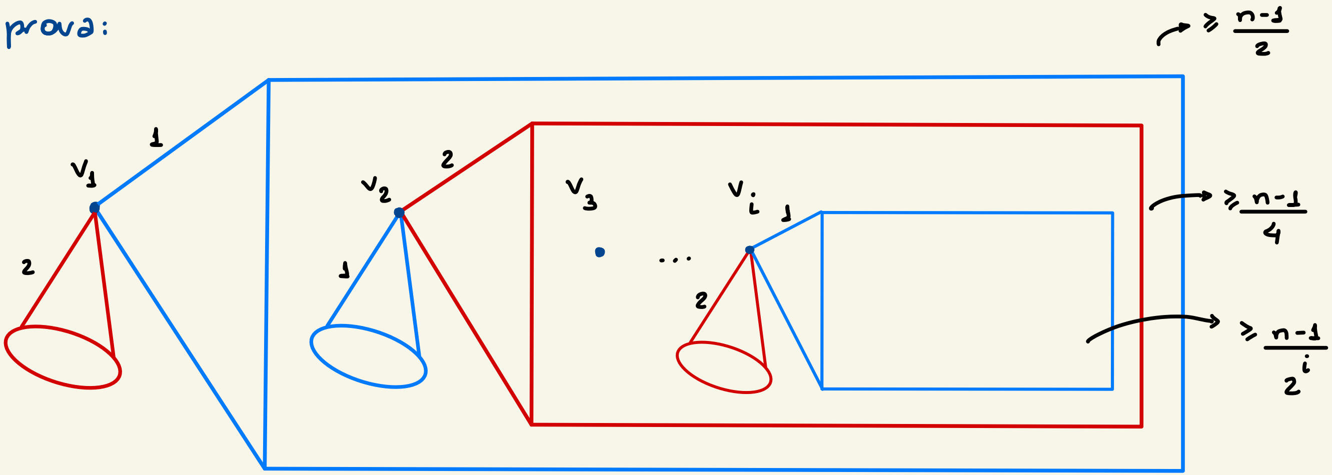


Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:

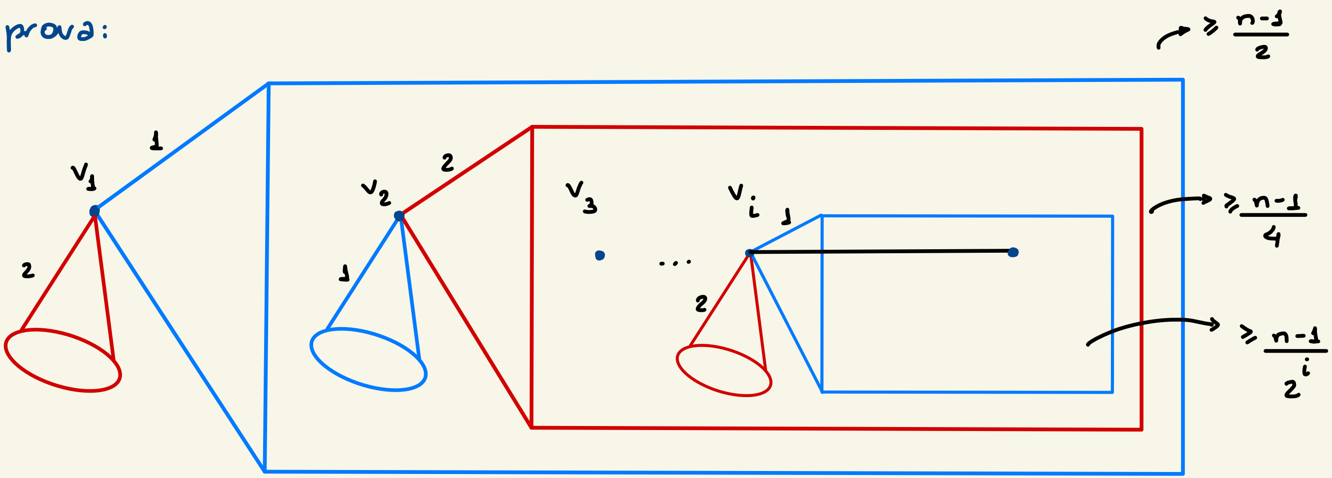


Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:



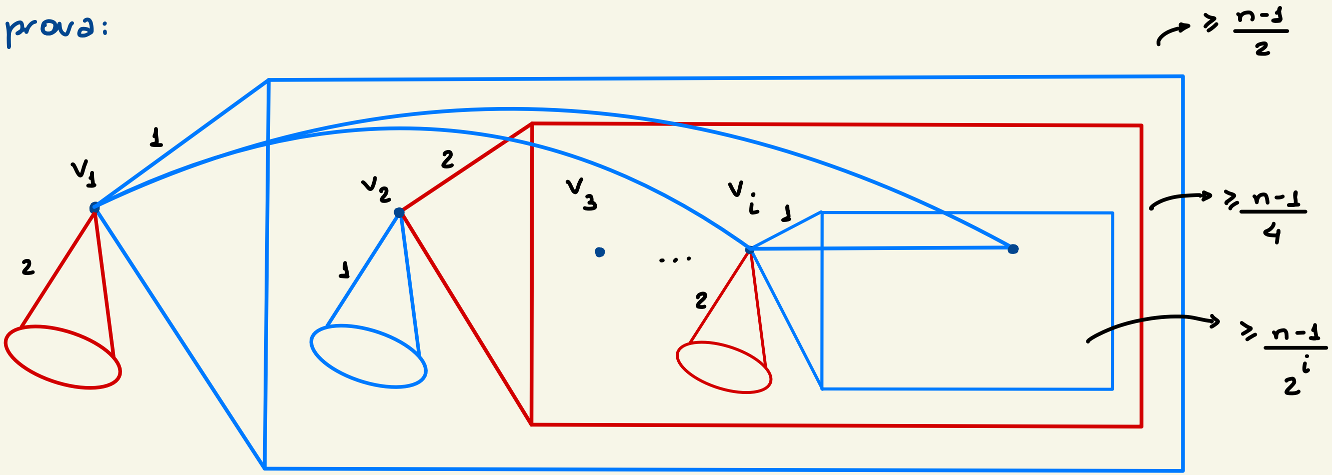
Quando $i \geq 2(k-1)$ e $\dfrac{n-1}{2^{2(k-1)}} \geq 1$ temos um K_k mono χ!

Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

prova:



Quando $i \geq 2(k-1)$ e $\frac{n-1}{2^{2(k-1)}} \geq 1$ temos um K_k mono X!

$\Rightarrow\ n > 2^{2(k-1)}$

$\square$

Números de Ramsey

coloração com 2 cores

Ramsey '30 $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: Toda 2-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

$$\hookrightarrow \quad R(k) \leq 2^{2(k-1)} + 1, \qquad 2^{2(k-1)} = 4^{(k-1)}$$

coloração com r cores

Ramsey '30 $\forall\ k, r \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: Toda r-coloração das arestas do K_n possui uma cópia monocromática de K_k. $\Rightarrow\ n > r^{r(k-1)}$.

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős e Szekeres '35 $\forall$ $\underline{k \geq 1}$ temos

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős e Szekeres '35 $\forall$ $\underline{k \geq 1}$ temos

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

"prova"

$R(s, t)$ = $\min\{ n :$ toda 2-coloração do K_n possui um K_s vermelho ou um K_t azul $\}$

$R(k, k) = R(k)$

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős e Szekeres '35 $\forall$ $\underline{k \geq 1}$ temos

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

"prova"

$R(s,t)$ = min { n : toda 2-coloração do K_n possui um K_s vermelho ou um K_t azul }

$R(k,k) = R(k)$

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

$\square$

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$

uma das primeiras aplicações do método probabilístico

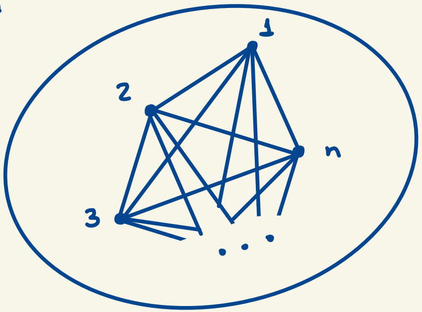
Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

- colorações

K_n :



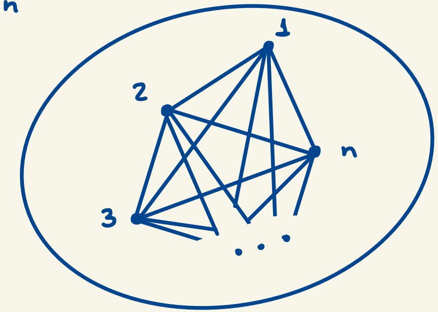
$n = 2^{k/2}$

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n:



$n = 2^{k/2}$

K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

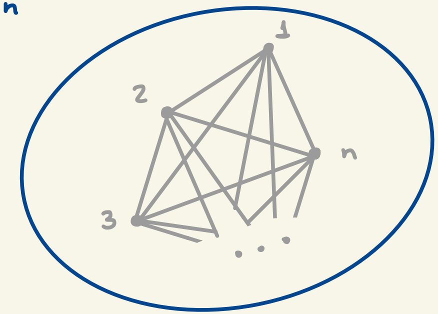
- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n:



- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações
- colorações <u>ruins</u>: com K_k mono^x.

$n = 2^{k/2}$

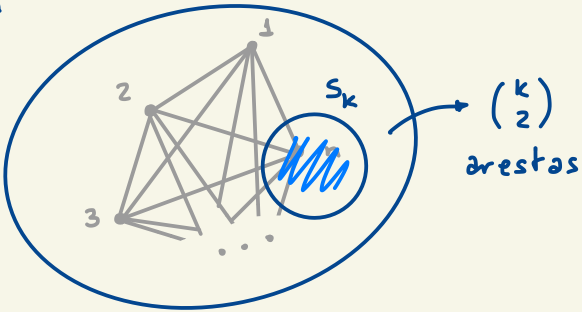
K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n :



- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações

- colorações ruins: com K_k mono^x.

$n = 2^{k/2}$

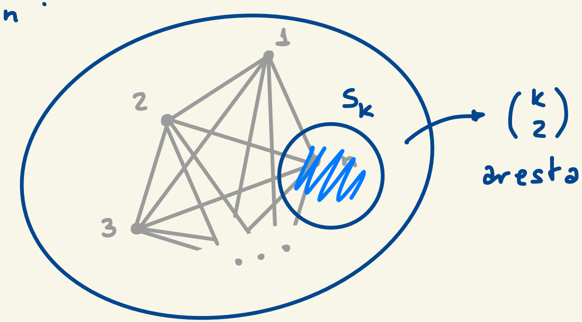
K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n:



- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações
- colorações <u>ruins</u>: com K_k mono^x.

$$\leq \quad 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$$

$n = 2^{k/2}$

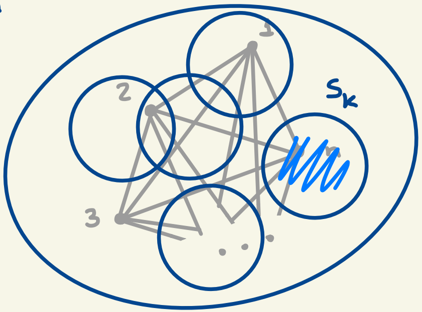
K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n:



- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações

- colorações ruins: com K_k mono^x.

$$\leq \qquad 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$$

$n = 2^{k/2}$

K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

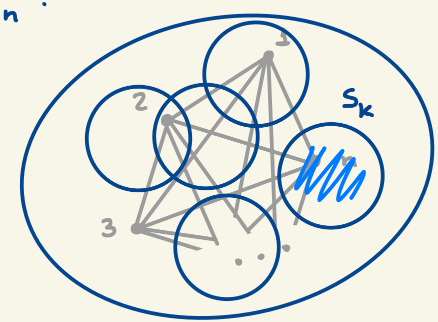
- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações

- colorações <u>ruins</u>: com K_k mono^x.

$$\leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$$

K_n :

$\binom{n}{k}$ escolhas p/ S_k



$n = 2^{k/2}$

K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

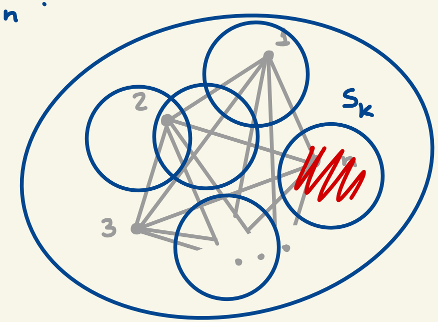
- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações
- colorações ruins: com K_k mono^x.

$$\leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} \cdot 2$$

↑

escolhas de cor p/ as arestas de S_k

K_n:



$n = 2^{k/2}$

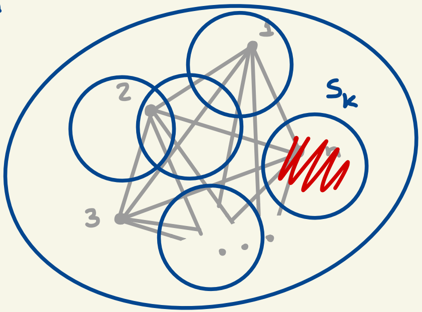
K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

Números de Ramsey: Limitantes

Erdős '47 $\forall\, k \geq 5$, temos $R(k) \geq 2^{k/2}$ ← uma das primeiras aplicações do método probabilístico

prova (não probabilística)

K_n:



- $2^{\binom{n}{2}}$ colorações
- colorações ruins: com K_k mono^x.

$$\leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \cdot 2 < 2^{\binom{n}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$n \leq 2^{k/2}$$

$n = 2^{k/2}$

K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas

$\square$

Números de Ramsey: Limitantes

Para $k \geq 5$, temos

$$\boxed{2^{k/2} \leq R(k) \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}}$$

Números de Ramsey: Limitantes

Para $k \geq 5$, temos

$$\boxed{2^{k/2} \leq R(k) \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}}$$

Spencer $\quad (1+o(1))\,\dfrac{k\,2^{(k+1)/2}}{e} \leq R(k) \leq k^{-c\log k}\,4^k$

Thomasson '88
Conlon '09
Sah '20]

usa quase aleatoriedade
e limites de grafos

Números de Ramsey: Limitantes

Para $k \geq 5$, temos

$$\boxed{2^{k/2} \leq R(k) \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}}$$

Spencer $\displaystyle (1+o(1))\frac{k\, 2^{(k+1)/2}}{e} \leq R(k) \leq k^{-c \log k}\, 4^k$

Thomasson '88
Conlon '09
Sah '20

usa quase aleatoriedade e limites de grafos

com mais cores:

$$5^{r/2} \leq R_r(3) \leq 3r!$$

Problema (Erdős) $\exists\, c > 0$ tal que $R_r(3) \leq 2^{cr}$ $\forall\, r \in \mathbb{N}$?

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey infinita

Teo. Toda r-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique monocromática infinita.

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey infinita

Teo. Toda r-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique mono $\times$ infinita.

Teoria de Ramsey em grafos

$G \to (H_1, H_2)$: Toda 2-coloração das arestas de G contém uma cópia de H_i com a cor i p/ algum i.

$R(H_1, H_2) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2) \}$

↳ número de Ramsey de H_1 vs H_2

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey infinita

Teo. Toda r-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique mono χ infinita.

Teoria de Ramsey em grafos

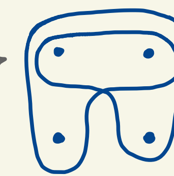
$G \to (H_1, H_2)$: Toda 2-coloração das arestas de G contém uma cópia de H_i com a cor i p/ algum i.

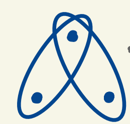
$$R(H_1, H_2) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2) \}$$

↳ número de Ramsey de H_1 vs H_2

e hipergrafos uniformes.

grafo 3-uniforme





grafo 2-uniforme

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey infinita

Teo. Toda r-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique monoχ infinita.

Teoria de Ramsey em grafos

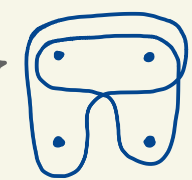
$G \to (H_1, H_2)$: Toda 2-coloração das arestas de G contém uma cópia de H_i com a cor i p/ algum i.

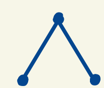
$$R(H_1, H_2) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2) \}$$

↳ número de Ramsey de H_1 vs H_2

e hipergrafos uniformes.

grafo 3-uniforme





grafo 2-uniforme = grafo simples

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey infinita

Teo. Toda r-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique mono $\times$ infinita.

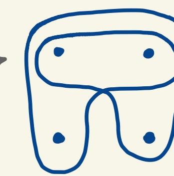
Teoria de Ramsey em grafos

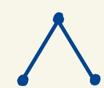
$G \to (H_1, H_2)$: Toda 2-coloração das arestas de G contém uma cópia de H_i com a cor i p/ algum i.

$R(H_1, H_2) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2) \}$

↳ número de Ramsey de H_1 vs H_2

grafo 3-uniforme





grafo 2-uniforme = grafo simples

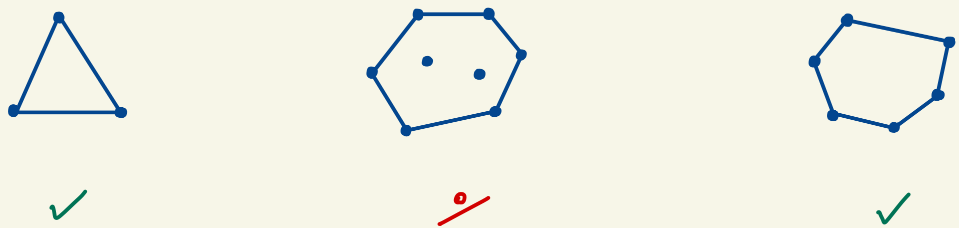
e hipergrafos uniformes.

$R^{(s)}(k, \ell) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n^{(s)} \to (K_k^{(s)}, K_\ell^{(s)}) \}$

Teoria de Ramsey em hipergrafos

Exercício. Sabendo que $R^{(s)}(k, \ell)$ é finito, mostre que existe $n = n(k)$ tal que qualquer conj. de n pontos no plano, em que quaisquer 3 pontos não são colineares, contém um subconj. de k pontos em posição convexa.

posição convexa:



Teoria de Ramsey em hipergrafos

Exercício. Sabendo que $R^{(s)}(k,\ell)$ é finito, mostre que existe $n = n(k)$ tal que qualquer conj. de n pontos no plano, em que quaisquer 3 pontos não são colineares, contém um subconj. de k pontos em posição convexa.

Fato: Dentre 5 pontos no plano, sem 3 colineares, sempre existe 4 pontos em posição convexa.

Fato: se dentre m pontos, quaisquer 4 estão em posição convexa, então todos estão em posição convexa.

Teoria de Ramsey: variações

Teoria de Ramsey aditiva

Estudo de estruturas aditivas que podem ser encontradas em r-colorações

$$\chi : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$$

dos inteiros positivos

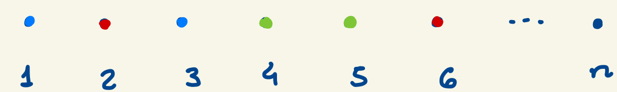
Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x + y = z$.

Teoria de Ramsey Aditiva

Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x+y=z$.

prova:

- coloração $\chi : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$

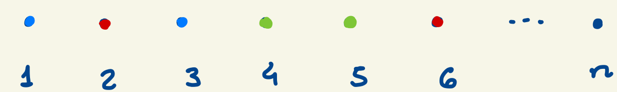


Teoria de Ramsey Aditiva

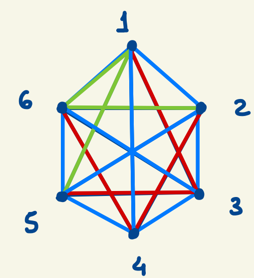
Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x + y = z$.

prova:

- coloração $\chi : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$



- grafo completo nos inteiros



  - coloração $c : \binom{\mathbb{N}}{2} \to \{0, \dots, r-1\}$

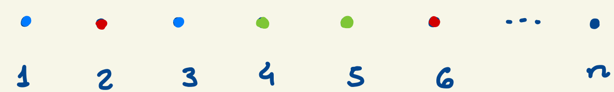
$$c(i,j) = \chi(|j-i|)$$

Teoria de Ramsey Aditiva

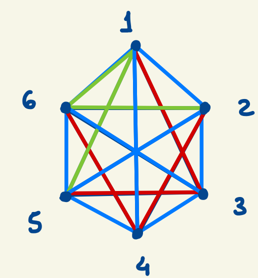
Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x+y=z$.

prova:

- coloração $\chi : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$



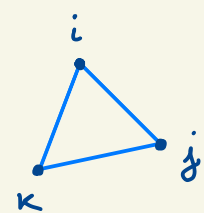
- grafo completo nos inteiros



  • coloração $c : \binom{\mathbb{N}}{2} \to \{0, \dots, r-1\}$

$$c(i,j) = \chi(|j-i|)$$

- o grafo nos $n = R_r(3)$ primeiros inteiros possui um K_3 monocromático

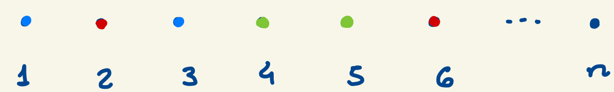


Teoria de Ramsey Aditiva

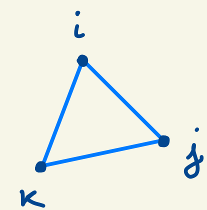
Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x+y=z$.

prova:

- coloração $\chi : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$



- grafo completo nos inteiros



  • coloração c tal que $c(i,j) = \chi(|j-i|)$

    com K_3 monocromático $(n \geq R_r(3))$

- $i < j < k$

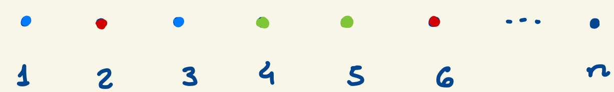
  $\chi(k-j) = \chi(j-i) = \chi(k-i)$

Teoria de Ramsey Aditiva

Schur '16 Toda r-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x+y=z$.

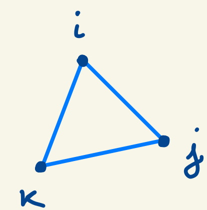
prova:

- coloração $\chi : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, \dots, r\}$



- grafo completo nos inteiros

  - coloração c tal que $c(i,j) = \chi(|j-i|)$
    com K_3 monocromático $(n \geq R_r(3))$



- $i < j < k$

$$\chi(\underbrace{k-j}_{x}) = \chi(\underbrace{j-i}_{y}) = \chi(\underbrace{k-i}_{z})$$

$\square$

Teoria de Ramsey Aditiva

Schur chegou a esse problema enquanto trabalhava no último Teorema de Fermat. Ele usou o resultado p/ mostrar que a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

tem uma solução não trivial módulo p $\forall$ primo p suficientemente grande.

Teoria de Ramsey Aditiva

Schur chegou a esse problema enquanto trabalhava no último Teorema de Fermat. Ele usou o resultado p/ mostrar que a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

tem uma solução não trivial módulo p $\forall$ primo p suficientemente grande.

van der Waerden Toda r-coloração dos inteiros positivos contém progressões aritméticas monox arbitrariamente longas.

Teoria de Ramsey Aditiva

Schur chegou a esse problema enquanto trabalhava no último Teorema de Fermat. Ele usou o resultado p/ mostrar que a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

tem uma solução não trivial módulo p $\forall$ primo p suficientemente grande.

van der Waerden Toda r-coloração dos inteiros positivos contém progressões aritméticas monox arbitrariamente longas.

Todo conj. $A \subseteq \mathbb{N}$ de densidade superior positiva contém uma k-PA?

$k=3$	Roth	'52	$(x+y=2z)$
qualquer k	Szemerédi	'75	

Teoria de Ramsey: variações

Tamanho Ramsey

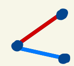
$$\hat{r}(H_1, H_2) = \min\{|E(G)| : G \rightarrow (H_1, H_2)\}$$

Teoria de Ramsey: variações

Tamanho Ramsey

$$\hat{r}(H_1, H_2) = \min\{|E(G)| : G \rightarrow (H_1, H_2)\}$$

Anti-Ramsey

- colorações próprias 
- procuramos estruturas multicoloridas sem repetição de cores

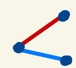
$G \xrightarrow[p]{rb} H$: qualquer coloração própria das arestas de G possui uma cópia multicolorida de H

Teoria de Ramsey: variações

Tamanho Ramsey

$$\hat{r}(H_1, H_2) = \min \{ |E(G)| : G \to (H_1, H_2) \}$$

Anti-Ramsey

- colorações próprias 
- procuramos estruturas multicoloridas sem repetição de cores

$G \xrightarrow{rb} H$: qualquer coloração própria das arestas de G possui uma cópia multicolorida de H

$AR(n, G) = \min \{ r$: toda coloração própria das arestas de K_n com pelo menos r cores possui uma cópia multicolorida de $G \}$

Problemas super interessantes

- melhorar os limitantes de $R_r(3)$

Problemas super interessantes

- melhorar os limitantes de $R_r(3)$

Determine $\lim_{k \to \infty} (R_k(3))^{1/k}$ (\$ 250)

O limite acima é finito ou não? (\$ 100)

Problemas super interessantes

- melhorar os limitantes de $R_r(3)$

  Determine $\lim_{k \to \infty} (R_k(3))^{1/k}$ (\$ 250)

  O limite acima é finito ou não? (\$ 100)

- comportamento do tamanho Ramsey p/ grafos de grau limitado

Problemas super interessantes

- melhorar os limitantes de $R_r(3)$

  Determine $\lim_{k\to\infty} (R_k(3))^{1/k}$ (\$ 250)

  O limite acima é finito ou não? (\$ 100)

- comportamento do tamanho Ramsey p/ grafos de grau limitado

- problemas Ramsey em cenários aleatórios

Problemas super interessantes

- melhorar os limitantes de $R_r(3)$

  Determine $\lim_{k \to \infty} (R_k(3))^{1/k}$ (\$ 250)

  O limite acima é finito ou não? (\$ 100)

- comportamento do tamanho Ramsey p/ grafos de grau limitado

- problemas Ramsey em cenários aleatórios

Obrigada!