

Movimento Browniano e Aplicações em Finanças Quantitativas

Yuri F. Saporito



28 de outubro de 2022

A evolução do movimento Browniano

- 1765 Jan Ingenhousz - poeira de carbono no álcool
- 1828 Robert **Brown** - grãos de pólen suspensos em água
- 1900 Louis **Bachelier** - modelagem do preço de um ativo usando mov. Browniano
- 1905 Einstein e Smoluchovski - interpretação física do mov. Browniano
- 1923 Norbert **Wiener** - descrição precisa do objetivo matemático e prova de sua existência



- Uma maneira de introduzir o mov. Browniano é através do passeio aleatório
- Considere uma seq. iid $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ e seja

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

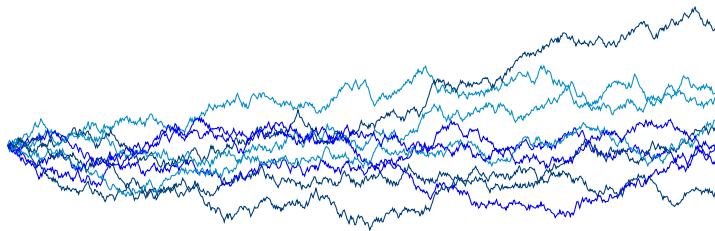
- Sabemos que $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ (LGN). Logo, o tamanho de passo $(1/n)$ é muito pequeno
- Agora, pelo TCL, temos que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$ em distribuição quando $n \rightarrow +\infty$
- Para introduzir o tempo, consideramos, para $t \in [0, 1]$,

$$B_t^{(n)} = \frac{X_1 + \dots + X_{[nt]}}{\sqrt{n}}$$

- O mov. Browniano é o limite desse processo estocástico (Teorema de Donsker)

O movimento Browniano

- O **movimento Browniano** é um processo estocástico $(B_t)_{t \geq 0}$ satisfazendo:
 - ▶ $B_0 = 0$;
 - ▶ Incrementos independentes, i.e. as v.a's $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{i=1, \dots, n}$, para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, são independentes;
 - ▶ $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, para qualquer $t > s$;
 - ▶ Os caminhos $t \mapsto B_t$ são contínuos quase certamente



$$B_{t_i} = \sum_{j=1}^i B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, \quad i = 1, \dots, N$$

O seguinte código (em Python) gera caminhos do movimento Browniano como os que vimos acima:

```
import numpy as np

T = 1 ##### horizonte temporal
N = int(1e2) ##### discretizacao temporal
M = int(1e5) ##### numero de simulacoes

dt = T/N

dW = np.sqrt(dt) * np.random.normal(size=(N-1,M))
W = np.cumsum(dW, axis=0)
```

- Note que $B_t - B_s$ é independente de todo o caminho de B até o tempo s
- $\mathbb{E}[B_t - B_s \mid B_u, u \leq s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$
- Logo, $(B_t)_{t \geq 0}$ é um **martingal** $\mathbb{E}[B_t \mid B_u, u \leq s] = B_s$

- Além disso, a covariância é dada por $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{t, s\}$

- $(B_t)_{t \geq 0}$ é um **processo Gaussiano**

- $X_t = B_t^2 - t$ é um martingal
- $Y_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ é um movimento Browniano
- $Z_t = e^{aB_t - a^2 t/2}$ é um martingal

- As três primeiras propriedades do mov. Browniano definem completamente as **distribuições finito-dimensionais** do processo: $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ tem distribuição normal multivariada com média zero e matriz de covariância $\min\{t_i, t_j\}$
- Mostrar a existência de um processo com essa distribuição é relativamente fácil. Por exemplo

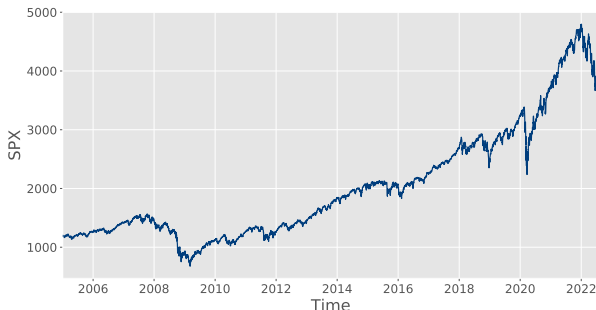
$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \int_0^t \phi_n(s) ds$$

onde $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seq. iid $N(0, 1)$ e $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2[0, 1]$ (**Teorema de Karhunen–Loève**)

- A principal dificuldade é juntar essas hipóteses sobre a distribuição finito-dimensional de B com a hipótese de continuidade de seus caminhos
- Em 1923, o matemático aplicado Norbert **Wiener** demonstrou a existência do movimento Browniano
- Uma forma de demonstrar a existência do mov. Browniano é mostrar que a série que vimos no slide anterior **converge uniformemente** em t

Finanças Quantitativas

- Notem a similaridade do índice S& P 500 do mercado de ações americano com um caminho do movimento Browniano:



- Logo, nosso objetivo será escrever um modelo para o preço de um ativo usando o movimento Browniano e depois precificar uma Call com maturidade T e strike K

- A primeira tentativa de modelar preço de ativos financeiros com o movimento Browniano foi feito pelo próprio Bachelier:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t$$

- $\mu \in \mathbb{R}$ é o drift, $\sigma > 0$ é a volatilidade e B é um mov. Browniano sob $\mathbb{P}$
- É um modelo Gaussiano e um possível problema é que $\mathbb{P}(S_t < 0) > 0$ para qualquer t
- Mas essa probabilidade pode ser muito pequena...
- É um modelo usado hoje em dia em alguns contextos por sua simplicidade

As seguintes hipóteses são muito comuns nos modelos de Finanças Quantitativas:

- É possível emprestar e tomar emprestado dinheiro a uma taxa de juros constante **livre de risco**, r
- O modelo ainda supõe tacitamente que
 - ▶ É possível vender o ativo a descoberto;
 - ▶ O ativo pode ser transacionado continuamente;
 - ▶ Todos os valores mobiliários são infinitamente divisíveis;
 - ▶ Não há custo de transação e nem impostos;
 - ▶ O ativo não paga dividendos.

- O modelo de Black–Scholes é uma forma de garantir que o ativo nunca assuma um valor negativo
- Ele supõe a seguinte dinâmica para seu preço, sob a medida histórica (ou subjetiva) $\mathbb{P}$,

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$$

- $\mu \in \mathbb{R}$ é o drift, $\sigma > 0$ é a volatilidade e B é um mov. Browniano sob $\mathbb{P}$

Estimação do Modelo de Black–Scholes

- Note que

$$X_i = \log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) \stackrel{iid}{\sim} N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \sigma^2 \Delta t \right)$$

- $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, ou seja, $t_i = i\Delta t$, onde usualmente Δt é um dia.
- T e seja n tal que $n\Delta t = T$. Logo, se definirmos

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ e } S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- temos os seguintes fatos elementares:

▶ $\bar{X}_n \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \frac{1}{n} \sigma^2 \Delta t \right)$

▶ $\frac{(n-1)}{\sigma^2 \Delta t} S_n \sim \chi_{n-1}^2$

▶ $\bar{X}_n$ é independente de S_n .

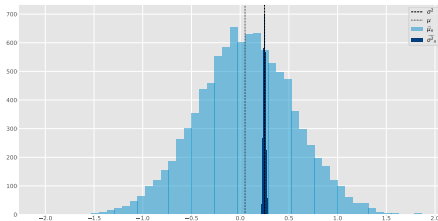
- Com isso, criamos os seguintes estimadores não-viesados de σ^2 e μ :

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{\Delta t} S_n \text{ e } \widehat{\mu}_n = \frac{1}{\Delta t} \bar{X}_n + \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_n^2.$$

- Claramente, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\widehat{\sigma}_n^2] = \sigma^2$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\widehat{\mu}_n] = \mu$.
- No entanto, temos que

$$\text{Var}(\widehat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{\Delta t^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{\Delta t^2} \frac{\sigma^4 \Delta t^2}{(n-1)^2} \text{Var}\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2 \Delta t} S_n\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\mu}_n) &= \frac{1}{\Delta t^2} \text{Var}(\bar{X}_n) + \frac{1}{4} \text{Var}(\widehat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{\Delta t^2} \frac{1}{n} \sigma^2 \Delta t + \frac{\sigma^4}{2(n-1)} \\ &= \frac{\sigma^2}{T} + \frac{\sigma^4}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

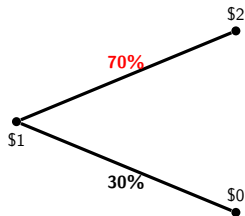


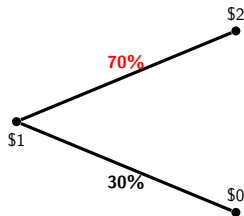
Histograma da repetição da estimação de μ e σ^2 em 10,000 caminhos simulados do modelo de Black–Scholes, cada caminho tendo 1,001 observações temporais. Além disso, escolhemos $T = 1$, $\mu = 0.05$ e $\sigma = 0.5$

- Para termos uma estimativa precisa de μ precisamos então considerar um horizonte de tempo T grande. Portanto, é realmente crucial que o parâmetro μ não apareça na fórmula de Black–Scholes.
- Entretanto, apesar de podermos estimar bem a volatilidade sob a hipótese dela ser constante, essa hipótese não se verifica na realidade

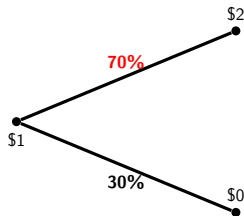
Finanças Quantitativas - Precificação de Derivativos

Finanças Quantitativas 101





Nesse mesmo cassino um bilhete é vendido que paga \$100 se sair **vermelho** na roleta, e não paga nada se sair **preto**



Nesse mesmo cassino um bilhete é vendido que paga \$100 se sair **vermelho** na roleta, e não paga nada se sair **preto**

Esse bilhete está sendo vendido por \$60. Está barato ou caro?

Finanças Quantitativas 101

- Considere o seguinte exemplo com o objetivo de introduzir o conceito de **derivativo**.
- Imagine que uma grande empresa do agronegócio brasileiro precise garantir a venda de soja em um mês e que essa venda deve ser acordada hoje.
- Então, para isso, basta que a empresa entre em contato com uma contraparte interessada em comprar soja e que combinem a entrega desejada para daqui a um mês a um preço pré-acordado.
- Com isso, aparece a seguinte pergunta:
 - ▶ Quanto essa empresa deve pagar (ou receber) para garantir a venda da soja?

- Vamos supor ainda que a contraparte não esteja interessada em comprar hoje a soja desejada para o mês seguinte, apesar de essa ser uma solução válida para o nosso problema.
- Na verdade, o que se pretende é ter a **garantia** que daqui a um mês a quantidade de soja desejada esteja disponível para compra pelo preço acordado.
- Note que esse contrato garante que a empresa possa vender a soja no próximo mês por um preço fixado hoje e, portanto, ela está se protegendo do risco de o preço da soja cair absurdamente.
- Através deste caso é possível exemplificar, com clareza, que um contrato como esse é muito importante para toda a economia.

- O contrato descrito acima, que garante a venda da soja no próximo mês, é um **derivativo**.
- A data em que o produto será entregue é a **maturidade**, a troca de capital realizada na maturidade para a transação do produto é chamado de **payoff** e o preço que devemos pagar ou receber hoje por esse derivativo é o **prêmio**.
- Um derivativo pode ser visto em toda sua generalidade como um instrumento financeiro cujo valor depende do valor de outro ativo, que chamaremos de **ativo subjacente** ao derivativo.
- Vale notar que o exemplo se encaixa nessa definição, pois o valor daquele derivativo depende do valor da soja.

Existem dois tipos de derivativos básicos e importantes:

- **Futuros:** são contratos para compra ou venda de um ativo em uma data futura pré-determinada (**maturidade**) por um preço especificado hoje (**strike**). O contrato exemplificado anteriormente é um futuro.
- **Opções:** são contratos que dão ao detentor o **direito**, mas não a obrigação, de comprar ou vender um ativo em uma data futura pré-determinada (**maturidade**) por um preço especificado hoje (**strike**). Se a opção der ao detentor o direito de compra, chamaremos esse contrato de opção de compra (ou **call**) e se der o direito de venda, chamaremos de opção de venda (ou **put**).

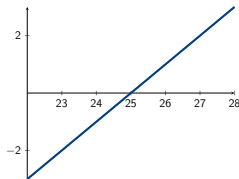
Derivativos

- O **payoff** de um derivativos é o valor monetário do derivativo na maturidade
- Se denotarmos o valor do ativo na maturidade por S_T e o strike por K , então os payoffs são dados por:

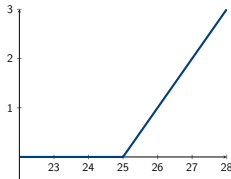
► **Futuro:** $S_T - K$

► **Call:** $S_T - K$, se $S_T > K$, e 0, caso contrário

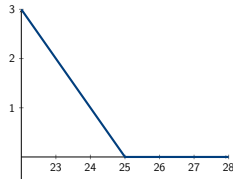
► **Put:** $K - S_T$, se $S_T < K$, e 0, caso contrário



Future $K - S_T$



Call $(S_T - K)^+$



Put $(K - S_T)^+$

Medida Neutra ao Risco

- Vamos considerar o caso de uma call: $(S - K)^+$
- Pode-se justificar o seguinte preço para essa opção:

$$C(T, K) = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$$

- Lembre que $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t} = S_0 e^{\mu t} e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_t}$
- E que $e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_t}$ é um martingal
- Gostaríamos de considerar um modelo no qual, quando o preço corrigido pela taxa de juros, $e^{-rt} S_t$, é um martingal
- É como se tivéssemos $\mu = r$ (mas NÃO é isso de fato)
- Logo, vamos calcular $\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$ com

$$S_t = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t}$$

A fórmula de Black–Scholes

- Note que $S_T = e^{X_T}$, onde $X_T \sim N(m, V^2)$, com $m = \log S_0 + (r - \sigma^2/2)T$ e $V = \sigma\sqrt{T}$
- $C(T, K) = e^{-rT} (\mathbb{E}[S_T 1_{\{S_T > K\}}] - K \mathbb{E}[1_{\{S_T > K\}}])$.
- Agora, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{\{S_T > K\}}] &= \mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{Q}(\log S_T > \log K) = \\ &= \mathbb{Q}\left(\frac{\log S_T - m}{V} > \frac{\log K - m}{V}\right) = \Phi\left(\frac{m - \log K}{V}\right). \end{aligned}$$

- Além disso, pode-se mostrar

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T 1_{\{S_T > K\}}] = e^{m+V^2/2} \Phi\left(V - \frac{\log K - m}{V}\right),$$

- Definindo

$$d_1 = \frac{m - \log K + V^2}{V} \text{ e } d_2 = \frac{m - \log K}{V} = d_1 - V,$$

achamos:

$$C(T, K) = e^{-rT} \left(e^{m+V^2/2} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right).$$

A fórmula de Black–Scholes

Portanto, achamos a famosa fórmula de Black–Scholes

$$C^{BS}(t, S, T, K, r, \sigma) = S\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$$

onde

$$d_{\pm} = \frac{\log(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad \Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

- O modelo de Black–Scholes serve como um bloco fundador de vários outros modelos que descrevem melhor a realidade do mercado de opções
- Volatilidade estocástica, adicionar dividendos, taxa de juros estocásticas
- Derivativos mais complexos: exercício antecipado (Americana), derivativos exóticos (asiático, com barreira, lookback...)
- dependência do caminho (path-dependence): Cálculo Funcional de Itô
- Controle Estocástico Ótimo: outros problemas em Finanças Quantitativas