Introdução à Análise

Nicolau C. Saldanha

PUC-Rio, 2025.0
06 de janeiro de 2025

Programa resumido

- Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.

Programa resumido

- Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- Números reais; supremo e ínfimo.

Programa resumido

- Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- Números reais; supremo e ínfimo.
- Sequências de números reais; limites; séries.

Programa resumido

- Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- Números reais; supremo e ínfimo.
- Sequências de números reais; limites; séries.
- Conjuntos de números reais; topologia da reta.

Programa resumido

- Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- Números reais; supremo e ínfimo.
- Sequências de números reais; limites; séries.
- Conjuntos de números reais; topologia da reta.
- Limites de funções; funções contínuas.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:30
e durando no máximo até 12:30.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:30
e durando no máximo até 12:30.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:30
e durando no máximo até 12:30.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

A avaliação será feita por meio de provas escritas.
As provas devem ser feitas individualmente,
respeitando o limite de tempo.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:30
e durando no máximo até 12:30.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

A avaliação será feita por meio de provas escritas.
As provas devem ser feitas individualmente,
respeitando o limite de tempo.
É permitido trazer material de consulta em papel
(livros, cadernos, apostilas).

Referências

Elon Lages Lima

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides
https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/

Análise real, volume 1, Coleção Matemática Universitária
https://impa.br/page-livros/analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)
- $\vee$ (ou; sempre inclusivo)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)
- $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)
- $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)
- $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Usamos os seguintes quantificadores:

- $\exists$ (existe)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- $\neg$ (não)
- $\wedge$ (e)
- $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Usamos os seguintes quantificadores:

- $\exists$ (existe)
- $\forall$ (para todo)

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- $=$ (igualdade);

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- $=$ (igualdade);
- variáveis;

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- $=$ (igualdade);
- variáveis;
- conectivos lógicos e quantificadores;

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- $=$ (igualdade);
- variáveis;
- conectivos lógicos e quantificadores;
- parêntesis.

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- $=$ (igualdade);
- variáveis;
- conectivos lógicos e quantificadores;
- parêntesis.

Uma proposição é uma sentença sem variáveis livres.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot.$$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot.$$

Outras constantes, operações e relações podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \ldots$$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot.$$

Outras constantes, operações e relações podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \ldots$$

$$(a \leq b) \quad \iff \quad (\exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot.$$

Outras constantes, operações e relações podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \ldots$$

$$(a \leq b) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$$

$$(a | b) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N}, b = ac)$$

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.
(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.
(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$.

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.
(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y?

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.
(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y?

Existem infinitos primos.
(Teorema de Euclides)

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.
(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y?

Existem infinitos primos.
(Teorema de Euclides)

$$\forall n, \exists m, ((m \geq n) \wedge \mathrm{Primo}(m))$$

$$\mathrm{Primo}(n) \iff ((n \geq 2) \wedge (\forall m, (m|n) \to ((m = 1) \vee (m = n)))$$

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental: $\in$ (pertence, é elemento de).

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental: $\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
$\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.
Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \quad \iff \quad (\forall Z, (Z \in X) \to (Z \in Y)).$$

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
$\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.
Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \iff (\forall Z, (Z \in X) \to (Z \in Y)).$$

O que significa $X \subset Y$?

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
$\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.
Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \quad \iff \quad (\forall Z, (Z \in X) \to (Z \in Y)).$$

O que significa $X \subset Y$?
Segundo alguns autores, tem o significado acima.
Segundo outros autores,

$$X \subset Y \quad \iff \quad ((X \subseteq Y) \wedge (X \neq Y))$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto,
conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto,
conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.
(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W,$$
$$(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto,
conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.
(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W,$$
$$(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \to (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.
(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W,$$
$$(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Dado um conjunto e uma propriedade, podemos tomar o subconjunto dos elementos satisfazendo a propriedade.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto,
conhecemos o conjunto.
(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.
(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W,$$
$$(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Dado um conjunto e uma propriedade, podemos tomar o subconjunto dos elementos satisfazendo a propriedade.
(Esquema da Seleção)

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, \ (Z \in Y) \leftrightarrow ((Z \in X) \wedge \phi(Z))$$

Escrevemos $Y = \{Z \in X \mid \phi(Z)\}$.

Paradoxo de Russell

Paradoxo de Russell

Seja
$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Paradoxo de Russell

Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Paradoxo de Russell

Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Paradoxo de Russell

Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!

Paradoxo de Russell

Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!

Paradoxo de Russell

Seja
$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,
$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!

Onde está o erro?

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.
Existe o conjunto vazio

$$\varnothing = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.
Existe o conjunto vazio

$$\varnothing = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Temos

$$\forall X, X \notin \varnothing.$$

Tudo ou nada

Dado Y, podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.
Existe o conjunto vazio

$$\varnothing = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Temos

$$\forall X, X \notin \varnothing.$$

Por outro lado não existe um conjunto V de tudo:

$$\nexists V, \forall X, X \in V.$$

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.
Nunca temos $X \in X$.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.
Nunca temos $X \in X$.
Também nunca temos $(X \in Y) \land (Y \in X)$.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.
Nunca temos $X \in X$.
Também nunca temos $(X \in Y) \wedge (Y \in X)$.

Assim, o "conjunto" R que tentamos construir
no Paradoxo de Russell é $R = V$:

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.
Nunca temos $X \in X$.
Também nunca temos $(X \in Y) \wedge (Y \in X)$.

Assim, o "conjunto" R que tentamos construir
no Paradoxo de Russell é $R = V$:
sabemos que V não é um conjunto.

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X, existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X.

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X, existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X. (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z,\ Z \in Y \leftrightarrow (\exists W((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X, existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X. (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z,\ Z \in Y \leftrightarrow (\exists W((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.
Dados A e B, definimos a união de A e B:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X, existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X. (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z,\ Z \in Y \leftrightarrow (\exists W((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.
Dados A e B, definimos a união de A e B:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

Outras operações com conjuntos: interseção e diferença:

$$A \cap B = \{Z \in A \mid Z \in B\} = \{Z \in B \mid Z \in A\}$$
$$A \setminus B = \{Z \in A \mid Z \notin B\}$$

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X, existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X. (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z,\ Z \in Y \leftrightarrow (\exists W((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.
Dados A e B, definimos a união de A e B:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

Outras operações com conjuntos: interseção e diferença:

$$A \cap B = \{Z \in A \mid Z \in B\} = \{Z \in B \mid Z \in A\}$$
$$A \smallsetminus B = \{Z \in A \mid Z \notin B\}$$

Muitos autores escrevem em vez $A - B$.

Partes

Dado um conjunto X, seja

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X, também chamado de potência de X.
A existência de $\mathcal{P}(X)$ é garantida pelo Axioma da Potência.

Partes

Dado um conjunto X, seja

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X, também chamado de potência de X.
A existência de $\mathcal{P}(X)$ é garantida pelo Axioma da Potência.
Assim, dado X e uma propriedade ϕ podemos definir

$$\mathcal{Y} = \{Y \subseteq X \mid \phi(Y)\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b, podemos formar um par ordenado (a, b).

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b, podemos formar um par ordenado (a, b).
A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \land (b_0 = b_1))$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b, podemos formar um par ordenado (a, b).
A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b, podemos formar um par ordenado (a, b).
A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \quad \iff \quad ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b, podemos formar um par ordenado (a, b).
A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \quad \Longleftrightarrow \quad ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

A existência de $A \times B$ segue do Axioma da Potência junto com o Esquema de Seleção.

Funções

Sejam A e B conjuntos.

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \to (b_0 = b_1)$.

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \rightarrow (b_0 = b_1)$.

As duas últimas condições podem ser reescritas como:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma.$$

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \to (b_0 = b_1)$.

As duas últimas condições podem ser reescritas como:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma.$$

Em qualquer caso, se $(a, b) \in \Gamma$ escrevemos $b = f(a)$.

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \to (b_0 = b_1)$.

As duas últimas condições podem ser reescritas como:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma.$$

Em qualquer caso, se $(a, b) \in \Gamma$ escrevemos $b = f(a)$.
Os conjuntos A, B e Γ são o domínio, contradomínio e gráfico da função f, respectivamente.

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \to (b_0 = b_1)$.

As duas últimas condições podem ser reescritas como:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma.$$

Em qualquer caso, se $(a, b) \in \Gamma$ escrevemos $b = f(a)$.
Os conjuntos A, B e Γ são o domínio, contradomínio e gráfico da função f, respectivamente. Escrevemos $f : A \to B$.

Funções

Sejam A e B conjuntos.
Uma função de A em B é $f = (A, B, \Gamma)$ onde:

- $\Gamma \subseteq A \times B$;
- $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \Gamma$;
- $\forall a \in A, \forall b_0, b_1 \in B, ((a, b_0), (a, b_1) \in \Gamma) \to (b_0 = b_1)$.

As duas últimas condições podem ser reescritas como:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma.$$

Em qualquer caso, se $(a, b) \in \Gamma$ escrevemos $b = f(a)$.
Os conjuntos A, B e Γ são o domínio, contradomínio e gráfico da função f, respectivamente. Escrevemos $f : A \to B$.

Muitas vezes confundimos f com Γ.

Injetividade e sobrejetividade

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* se

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((f(a_0) = f(a_1)) \to (a_0 = a_1))$$

Injetividade e sobrejetividade

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* se

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((f(a_0) = f(a_1)) \to (a_0 = a_1))$$

Equivalentemente (contrapositiva):

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((a_0 \neq a_1) \to (f(a_0) \neq f(a_1)))$$

Injetividade e sobrejetividade

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* se

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((f(a_0) = f(a_1)) \to (a_0 = a_1))$$

Equivalentemente (contrapositiva):

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((a_0 \neq a_1) \to (f(a_0) \neq f(a_1)))$$

Uma função $f : A \to B$ é *sobrejetora* se

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

Injetividade e sobrejetividade

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* se

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((f(a_0) = f(a_1)) \to (a_0 = a_1))$$

Equivalentemente (contrapositiva):

$$\forall a_0, a_1 \in A, ((a_0 \neq a_1) \to (f(a_0) \neq f(a_1)))$$

Uma função $f : A \to B$ é *sobrejetora* se

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

Uma função é *bijetora* se for injetora e sobrejetora.

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.
A *função identidade* $\mathrm{id}_A : A \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.
A *função identidade* $\mathrm{id}_A : A \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.
A *função identidade* $\mathrm{id}_A : A \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.
Defina a *composta* $g \circ f : A \to C$ por

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.
A *função identidade* $\mathrm{id}_A : A \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.
Defina a *composta* $g \circ f : A \to C$ por

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.

Identidade, compostas e inversas

Seja A um conjunto.
A *função identidade* $\mathrm{id}_A : A \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.
Defina a *composta* $g \circ f : A \to C$ por

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A *função inversa* $f^{-1} : B \to A$ é definida por

$$\forall a \in A, \forall b \in B, ((f(a) = b) \leftrightarrow (f^{-1}(b) = a))$$

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Se $A \neq \varnothing$ e $f : A \to B$ é injetora então f admite uma *inversa à esquerda*:

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Se $A \neq \varnothing$ e $f : A \to B$ é injetora então f admite uma *inversa à esquerda*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Se $A \neq \varnothing$ e $f : A \to B$ é injetora então f admite uma *inversa à esquerda*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Se $f : A \to B$ é sobrejetora então f admite uma *inversa à direita*:

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Se $A \neq \varnothing$ e $f : A \to B$ é injetora então f admite
uma *inversa à esquerda*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Se $f : A \to B$ é sobrejetora então f admite
uma *inversa à direita*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Inversas laterais

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora.
A inversa $f^{-1} : B \to A$ é caracterizada por

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Se $A \neq \varnothing$ e $f : A \to B$ é injetora então f admite uma *inversa à esquerda*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Se $f : A \to B$ é sobrejetora então f admite uma *inversa à direita*: uma função $g : B \to A$ satisfazendo

$$f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Esta última afirmação é o Axioma da Escolha.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

A *imagem* de f é $f[A] \subseteq B$.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

A *imagem* de f é $f[A] \subseteq B$.

Não confunda contradomínio e imagem!

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

A *imagem* de f é $f[A] \subseteq B$.

Não confunda contradomínio e imagem!

Seja $Y \subseteq B$.

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

A *imagem* de f é $f[A] \subseteq B$.

Não confunda contradomínio e imagem!

Seja $Y \subseteq B$. A *imagem inversa* de Y por f é

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A.$$

Imagens e imagens inversas

Seja $f : A \to B$ uma função. Seja $X \subseteq A$.
A *imagem* de X por f é

$$f[X] = \{f(x), x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X, b = f(x)\} \subseteq B.$$

Muitos autores escrevem $f(X)$.

A *imagem* de f é $f[A] \subseteq B$.

Não confunda contradomínio e imagem!

Seja $Y \subseteq B$. A *imagem inversa* de Y por f é

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A.$$

Note que $f^{-1}[Y] \subseteq A$ está bem definida mesmo quando
a função $f : A \to B$ não é injetora.