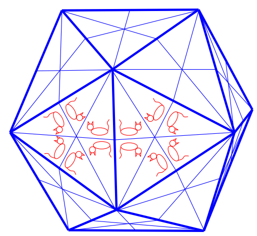
PUC-Rio

Desafio Nicolau Saldanha

31 de agosto de 2025



Nome:______________________________ Inscrição:__________

Assinatura:____________________________ Identidade:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- A prova tem duração de 4 horas.

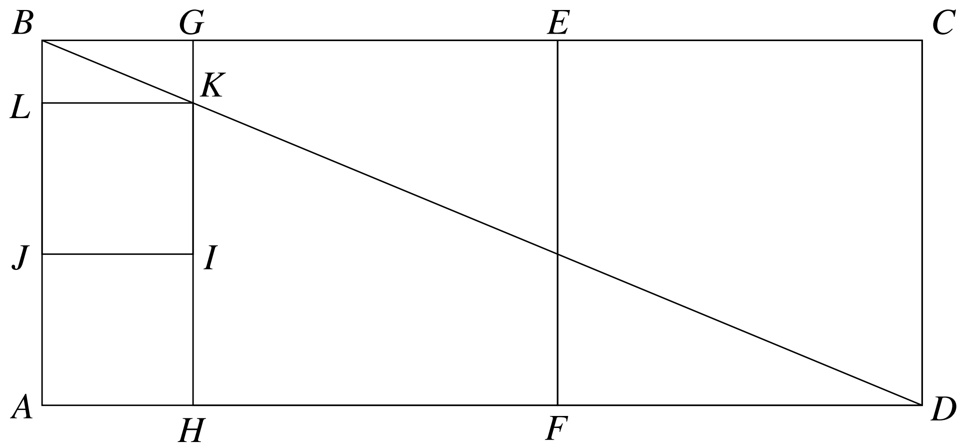
- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
  Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
  Você **não** tem o direito de consultar anotações.

- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.

- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.

- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. A figura mostra um retângulo $ABCD$. Sabemos que $FECD$, $HGEF$, $AJIH$ e $JLKI$ são quadrados. Sabemos também que os pontos B, K e D são colineares.



Determine a razão entre os segmentos AB e BC.

2. Seja $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.

   (a) Calcule $P(1)$ e $P(\frac{1}{2})$.

   (b) Encontre todas as raízes (reais ou complexas) de cada uma das equações: $P(X) = 0$, $P(X) = 1$, $P(X) = -1$.

   (c) Quantas raízes reais distintas tem a equação $P(P(X)) = 1$?

3. Jogamos simultaneamente n moedas comuns e honestas:
seja $C \in \{0, 1, \ldots, n-1, n\}$ o número obtido de caras.
Seja $p_{n,c}$ a probabilidade de obtermos $C = c$ (com n moedas).

Assim, por exemplo, $p_{1,0} = p_{1,1} = \frac{1}{2}$, pois para $n = 1$ (lançamento de uma única moeda) temos probabilidade $\frac{1}{2}$ de termos uma cara e zero coroas ($C = 1$) e probabilidade $\frac{1}{2}$ de termos uma coroa e zero caras ($C = 0$).
Temos também $p_{2,0} = \frac{1}{4}$, $p_{2,1} = \frac{1}{2}$ e $p_{2,2} = \frac{1}{4}$.

Seja q_n a probabilidade de que C seja múltiplo de 5:

$$q_n = \sum_j p_{n,5j} = p_{n,0} + p_{n,5} + p_{n,10} + \cdots .$$

Assim, por exemplo, $q_2 = p_{2,0} = \frac{1}{4}$ e $q_3 = p_{3,0} = \frac{1}{8}$.

(a) Calcule q_4, q_5 e q_6.

(b) Para quais valores de n temos $q_n = \frac{1}{5}$?

(c) Para quais valores de n temos $q_n > \frac{1}{5}$?

4. A *parte inteira* de um número real x é o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ satisfazendo

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Assim, por exemplo, $\lfloor \pi/2 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor 8\pi \rfloor = 25$.
Para um inteiro positivo n, seja $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ e seja A o conjunto

$$A = \{a_n,\ n \in \mathbb{Z}, n > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots\}.$$

Seja B o complemento de A nos inteiros positivos:

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid (m > 0) \wedge (\nexists n, m = a_n)\} = \{3, 6, 10, 13, 17, \ldots\}.$$

Sejam $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$ os elementos de B. Assim, por exemplo:

$$b_1 = 3, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 10, \quad b_4 = 13, \quad b_5 = 17, \ldots$$

(a) Calcule b_n para $n \leq 20$.

(b) Calcule $b_{2025} - a_{2025}$.

5. Sabemos que as funções $f, g : [0,1] \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ satisfazem:

$$f(t) = \begin{cases} g(3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ 1 - g(3t-1), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ g(3t-2), & \frac{2}{3} \le t \le 1, \end{cases} \qquad 3g(t) = \begin{cases} f(3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ 1 + f(3t-1), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ 2 + f(3t-2), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

Assim, por exemplo, tomando $t = \frac{1}{2}$ nas equações acima temos

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - g\left(\frac{1}{2}\right), \qquad 3g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

e portanto

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

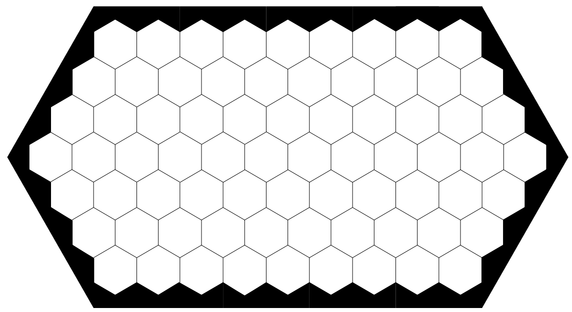
(a) Calcule $f(\frac{1}{4})$, $g(\frac{1}{4})$, $f(\frac{1}{13})$, $g(\frac{1}{13})$.

(b) Encontre todas as soluções do sistema abaixo:

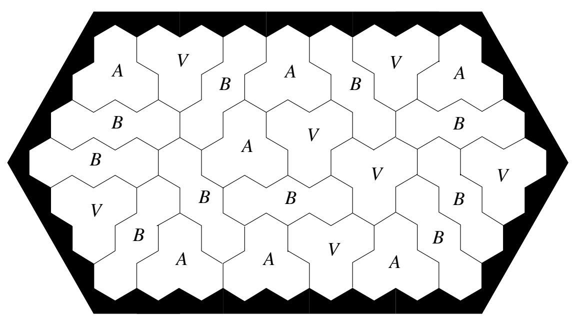
$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{4}, \\ g(t) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ou seja, encontre todos os valores de $t \in [0,1]$ satisfazendo simultaneamente $f(t) = \frac{1}{4}$ e $g(t) = \frac{1}{3}$.

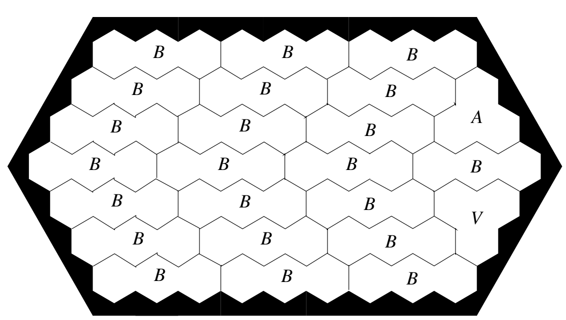
6. Jim tem um tabuleiro formado por 72 hexágonos regulares unitários, como mostrado nas figuras.



Jim tem um grande número de peças dos dois formatos mostrados. As peças de um tipo são formadas por três hexágonos unitários em linha reta e são chamadas de peças do tipo B (de barra).
As outras peças são aproximadamente triangulares, formadas por três hexágonos unitários ao redor de um vértice comum: essas peças são do tipo A ou V, conforme tenham vértice para cima ou para baixo.



Jim quer estudar as formas de cobrir o tabuleiro com peças. Para cada cobertura, ele conta as peças de cada tipo: a peças de tipo A, b peças de tipo B e v peças de tipo V. Na cobertura acima temos $(a, b, v) = (7, 10, 7)$; na cobertura abaixo temos $(a, b, v) = (1, 22, 1)$.



Determine quais são os valores possíveis para a tripla (a, b, v).