

Introdução à Análise

Nicolau C. Saldanha

PUC-Rio, 2026.0
05 de janeiro de 2026

Programa resumido

- ▶ Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.

Programa resumido

- ▶ Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- ▶ Números reais; supremo e ínfimo.

Programa resumido

- ▶ Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- ▶ Números reais; supremo e ínfimo.
- ▶ Sequências de números reais; limites; séries.

Programa resumido

- ▶ Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- ▶ Números reais; supremo e ínfimo.
- ▶ Sequências de números reais; limites; séries.
- ▶ Conjuntos de números reais; topologia da reta.

Programa resumido

- ▶ Fundamentos; teoria dos conjuntos; aritmética.
- ▶ Números reais; supremo e ínfimo.
- ▶ Sequências de números reais; limites; séries.
- ▶ Conjuntos de números reais; topologia da reta.
- ▶ Limites de funções; funções contínuas.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas começando pontualmente às 09:00 e durando no máximo até 12:00.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:00
e durando no máximo até 12:00.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:00
e durando no máximo até 12:00.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

<https://puc-rio.zoom.us/j/91706640244?pwd=JhUeRM7BQXvQavO60lbq7WZiM5ueiq.1>

Meeting ID: 917 0664 0244

Passcode: 585802

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:00
e durando no máximo até 12:00.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

<https://puc-rio.zoom.us/j/91706640244?pwd=JhUeRM7BQXvQavO60lbq7WZiM5ueiq.1>

Meeting ID: 917 0664 0244

Passcode: 585802

A avaliação será feita por meio de provas escritas.
Haverá duas provas regulares e uma prova final se necessário
(Critério 6).

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas
começando pontualmente às 09:00
e durando no máximo até 12:00.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

<https://puc-rio.zoom.us/j/91706640244?pwd=JhUeRM7BQXvQavO60lbq7WZiM5ueiq.1>

Meeting ID: 917 0664 0244

Passcode: 585802

A avaliação será feita por meio de provas escritas.
Haverá duas provas regulares e uma prova final se necessário
(Critério 6).

As provas devem ser feitas individualmente,
respeitando o limite de tempo.

Aulas e avaliação

Aulas às segundas quartas e sextas começando pontualmente às 09:00 e durando no máximo até 12:00.

Aulas presencialmente na sala 856L e por Zoom.
As aulas serão gravadas e disponibilizadas.

<https://puc-rio.zoom.us/j/91706640244?pwd=JhUeRM7BQXvQavO60lbq7WZiM5ueiq.1>

Meeting ID: 917 0664 0244

Passcode: 585802

A avaliação será feita por meio de provas escritas.
Haverá duas provas regulares e uma prova final se necessário
(Critério 6).

As provas devem ser feitas individualmente, respeitando o limite de tempo.
É permitido trazer material de consulta em papel (livros, cadernos, apostilas).

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

<https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

<https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>

Análise real, volume 1, Coleção Matemática Universitária

[https://impa.br/page-livros/
analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/](https://impa.br/page-livros/analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/)

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

<https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>

Análise real, volume 1, Coleção Matemática Universitária

[https://impa.br/page-livros/
analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/](https://impa.br/page-livros/analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/)

Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis

(tradução com o título: Princípios de análise matemática)

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

<https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>

Análise real, volume 1, Coleção Matemática Universitária

[https://impa.br/page-livros/
analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/](https://impa.br/page-livros/analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/)

Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis

(tradução com o título: Princípios de análise matemática)

Stephen Abbott, Understanding analysis

Referências

Elon Lages Lima

Curso de Análise, volume 1, Projeto Euclides

<https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>

Análise real, volume 1, Coleção Matemática Universitária

[https://impa.br/page-livros/
analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/](https://impa.br/page-livros/analise-real-vol-1-funcoes-de-uma-variavel/)

Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis

(tradução com o título: Princípios de análise matemática)

Stephen Abbott, Understanding analysis

Charles C. Pugh, Real mathematical analysis

Gravação das aulas de 2025.0

<https://youtu.be/b22nZXiUuCw>, <https://youtu.be/uPtoSP6LLvM>,
<https://youtu.be/KQkkW0pRsYQ>, https://youtu.be/0klPhf_4ZAc,
<https://youtu.be/f76TGcC5REU>, https://youtu.be/joI_1AuPYDU,
<https://youtu.be/jmhMa8L-RqM>, <https://youtu.be/Ibft--j32Gg>,
<https://youtu.be/cGJ3CsB3dXE>, <https://youtu.be/ukXDiFYVEk0>,
<https://youtu.be/9rSRFF1sWW0>, <https://youtu.be/GYMwmd8-Ciw>,
https://youtu.be/AllvSJJA_fg, <https://youtu.be/d628X7n7m78>,
<https://youtu.be/ZB4kx76swAs>, https://youtu.be/_lgLFXmMGJo,
https://youtu.be/_ggHXwziecY, <https://youtu.be/Zi7SDvven-0>,
<https://youtu.be/skp0bNKa0i4>.

Gravação das aulas de 2024.0

<https://youtu.be/e1k9-5MZxwA>, https://youtu.be/bZjx2Eu9V_M,
<https://youtu.be/BAHNjL5XdiQ>, <https://youtu.be/LJ-5gfrAxCQ>,
<https://youtu.be/sf0GvtvVB00>, <https://youtu.be/LJn0Hoh02xs>,
<https://youtu.be/ITD1RgFoxhY>, <https://youtu.be/u0Tc4-mw3Io>,
https://youtu.be/_A12-MjCxEs, https://youtu.be/AGAGWX8a_AU,
https://youtu.be/xgGKDQRC_9M, <https://youtu.be/XyLlpAsYMPg>,
<https://youtu.be/sTVt-JB-zWY>, <https://youtu.be/1x-mxhvjhk8>,
<https://youtu.be/W6YYvPbm9t8>, <https://youtu.be/pvq0ym2wW6g>,
<https://youtu.be/uq-BNf159ZU>, <https://youtu.be/EB1tpx29rW8>,
<https://youtu.be/vnEQ0Yn4Zl8>, https://youtu.be/6qqZ_xmt10E.

Gravação das aulas de 2023.0

<https://youtu.be/1UCvnw7lW5E>, <https://youtu.be/zPvjrt6Jkb0>,
<https://youtu.be/PJTJc-xGWSs>, <https://youtu.be/kJABd8FWTjY>,
<https://youtu.be/LrFqcfQ4g9A>, <https://youtu.be/6RVOSOmALm0>,
<https://youtu.be/-00IYch8Pk4>, https://youtu.be/Enwnn_stxTY,
https://youtu.be/0a_IyoUsDKU, <https://youtu.be/VwCDLbla3lQ>,
<https://youtu.be/Gi5Bto6YdPo>, <https://youtu.be/w11oEnhWUL8>,
<https://youtu.be/s4faxfyRANc>, <https://youtu.be/UV-f2TZpoMc>,
https://youtu.be/hfK15_G3ZME, <https://youtu.be/tzJGpJQlRTM>,
<https://youtu.be/Ds0evXcJyvg>, <https://youtu.be/4PxTy5KKtU0>,
<https://youtu.be/87LHC5wA10E>, <https://youtu.be/SYM8VaW4NxQ>,

Gravação das aulas de 2022.0

<https://youtu.be/TPv6SnTTPRU>, <https://youtu.be/w1NQTKMbKpc>,
<https://youtu.be/-MwDhdTLm7w>, <https://youtu.be/nfi0tZNqMJ0>,
https://youtu.be/_F6PmYw5QuA, <https://youtu.be/ybIR9PS1CmQ>,
<https://youtu.be/tEsh6CpwNLo>, <https://youtu.be/K98y4ncGFfQ>,
<https://youtu.be/cN87CHvFJ8Q>, <https://youtu.be/YMDELX-pcmQ>,
<https://youtu.be/IIoRoJXQdP8>, <https://youtu.be/cb6wkIlqab4>,
<https://youtu.be/DvgDYhgHWEE>, <https://youtu.be/oay66g9E3Ac>,
<https://youtu.be/d03DNwvtark>, https://youtu.be/1LemfoT0p_0,
<https://youtu.be/HAX9kSCvFQg>, <https://youtu.be/vpbfgm6MzGY>,
<https://youtu.be/TRuN0yyKAQ4>, <https://youtu.be/4KMr3v0V8gY>.

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

► $\neg$ (não)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)
- ▶ $\vee$ (ou; sempre inclusivo)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)
- ▶ $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- ▶ $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)
- ▶ $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- ▶ $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- ▶ $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)
- ▶ $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- ▶ $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- ▶ $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Usamos os seguintes quantificadores:

- ▶ $\exists$ (existe)

Conectivos lógicos e quantificadores

Usamos os seguintes conectivos lógicos:

- ▶ $\neg$ (não)
- ▶ $\wedge$ (e)
- ▶ $\vee$ (ou; sempre inclusivo)
- ▶ $\rightarrow$ (implica; não deve sugerir causa e efeito)
- ▶ $\leftrightarrow$ (equivale; não confundir com implica)

Usamos os seguintes quantificadores:

- ▶ $\exists$ (existe)
- ▶ $\forall$ (para todo)

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- ▶ $=$ (igualdade);

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- ▶ $=$ (igualdade);
- ▶ variáveis;

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- ▶ $=$ (igualdade);
- ▶ variáveis;
- ▶ conectivos lógicos e quantificadores;

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- ▶ $=$ (igualdade);
- ▶ variáveis;
- ▶ conectivos lógicos e quantificadores;
- ▶ parêntesis.

Sentenças e proposições

Uma sentença pode ser escrita usando:

- ▶ símbolos da teoria (constantes, operações ou relações);
- ▶ $=$ (igualdade);
- ▶ variáveis;
- ▶ conectivos lógicos e quantificadores;
- ▶ parêntesis.

Uma proposição é uma sentença sem variáveis livres.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.



Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.



Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A teoria tem duas constantes e
duas operações binárias fundamentais:

$0, 1, +, \cdot$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.



Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A teoria tem duas constantes e
duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot$$

Outras constantes, operações e relações
podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \dots$$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.



Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot$$

Outras constantes, operações e relações podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \dots$$

$$(a \leq b) \iff (\exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$$

Aritmética de Peano

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.



Muitos autores definem em vez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A teoria tem duas constantes e duas operações binárias fundamentais:

$$0, 1, +, \cdot$$

Outras constantes, operações e relações podem ser definidas a partir dessas:

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \dots$$

$$(a \leq b) \iff (\exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$$

$$(a|b) \iff (\exists c \in \mathbb{N}, b = ac)$$

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.

(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.

(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$.

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.

(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y ?

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.

(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y ?

Existem infinitos primos.

(Teorema de Euclides)

Aritmética (cont)

Vamos traduzir algumas proposições:

Todo natural é soma de quatro quadrados.

(Teorema de Lagrange dos quatro quadrados)

$$\forall n, \exists a, b, c, d, (n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

onde $x^2 = x \cdot x$. Mas como definir x^y ?

Existem infinitos primos.

(Teorema de Euclides)

$$\forall n, \exists m, ((m \geq n) \wedge \text{Primo}(m))$$

$$\text{Primo}(n) \iff ((n \geq 2) \wedge (\forall m, (m|n) \rightarrow ((m = 1) \vee (m = n))))$$

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
 $\in$ (pertence, é elemento de).

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
 $\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
 $\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.

Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \iff (\forall Z, (Z \in X) \rightarrow (Z \in Y)).$$

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
 $\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.
Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \iff (\forall Z, (Z \in X) \rightarrow (Z \in Y)).$$



O que significa $X \subset Y$?

Teoria dos conjuntos

A teoria dos conjuntos tem uma única relação fundamental:
 $\in$ (pertence, é elemento de).

Outras constantes e relações são definidas a partir dela.
Por exemplo, a inclusão entre conjuntos:

$$X \subseteq Y \iff (\forall Z, (Z \in X) \rightarrow (Z \in Y)).$$



O que significa $X \subset Y$?

Segundo alguns autores, tem o significado acima.

Segundo outros autores,

$$X \subset Y \iff ((X \subseteq Y) \wedge (X \neq Y))$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W, \\ (W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

(Axioma do Par)

$$\forall X, Y, \exists Z, \forall W, \\ (W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y))$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

(Axioma do Par)

$$\begin{aligned} &\forall X, Y, \exists Z, \forall W, \\ &(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y)) \end{aligned}$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Dado um conjunto e uma propriedade, podemos tomar o subconjunto dos elementos satisfazendo a propriedade.

Alguns fatos básicos sobre conjuntos

Se sabemos quem pertence a um conjunto, conhecemos o conjunto.

(Axioma da Extensão)

$$\forall X, Y, ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)) \rightarrow (X = Y)$$

Podemos formar conjuntos com dois elementos dados.

(Axioma do Par)

$$\begin{aligned} &\forall X, Y, \exists Z, \forall W, \\ &(W \in Z) \leftrightarrow ((W = X) \vee (W = Y)) \end{aligned}$$

Escrevemos $Z = \{X, Y\}$.

Dado um conjunto e uma propriedade, podemos tomar o subconjunto dos elementos satisfazendo a propriedade.

(Esquema da Seleção)

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y) \leftrightarrow ((Z \in X) \wedge \phi(Z))$$

Escrevemos $Y = \{Z \in X \mid \phi(Z)\}$.

Paradoxo de Russell



Paradoxo de Russell

Seja



$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Paradoxo de Russell



Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Paradoxo de Russell



Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Paradoxo de Russell



Seja

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!

Paradoxo de Russell

Seja



$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!



Paradoxo de Russell

Seja



$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

Assim,

$$\forall X, ((X \in R) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tome $X = R$: temos

$$((R \in R) \leftrightarrow (R \notin R))$$

Mas isso é um absurdo!

Onde está o erro?



Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.

Existe o conjunto vazio

$$\emptyset = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.
Existe o conjunto vazio

$$\emptyset = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Temos

$$\forall X, X \notin \emptyset.$$

Tudo ou nada

Dado Y , podemos definir (usando o Esquema da Seleção)

$$R_Y = \{X \in Y \mid X \notin X\}$$

Temos

$$\forall X \in Y, ((X \in R_Y) \leftrightarrow (X \notin X))$$

e portanto

$$R_Y \subseteq Y, \quad R_Y \notin Y.$$

Em particular, dado um conjunto Y sempre existe Z com $Z \notin Y$.
Existe o conjunto vazio

$$\emptyset = \emptyset = \{X \in Y \mid 0 = 1\}.$$

Temos

$$\forall X, X \notin \emptyset.$$

Por outro lado não existe um conjunto V de tudo:

$$\nexists V, \forall X, X \in V, \quad \forall V, \exists X, X \notin V.$$

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.
Nunca temos $X \in X$.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.

Nunca temos $X \in X$.

Também nunca temos $(X \in Y) \wedge (Y \in X)$.

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.

Nunca temos $X \in X$.

Também nunca temos $(X \in Y) \wedge (Y \in X)$.

Assim, o “conjunto” R que tentamos construir no Paradoxo de Russell é $R = V$:

Fundação

Só podemos formar conjuntos a partir de material pré-existente.

Nunca temos $X \in X$.

Também nunca temos $(X \in Y) \wedge (Y \in X)$.

Assim, o “conjunto” R que tentamos construir

no Paradoxo de Russell é $R = V$:

sabemos que V não é um conjunto.

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X , existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X .

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X , existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X . (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z, Z \in Y \leftrightarrow (\exists W ((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X , existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X . (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z, Z \in Y \leftrightarrow (\exists W ((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.

Dados A e B , definimos a união de A e B :

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X , existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X . (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z, Z \in Y \leftrightarrow (\exists W ((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.

Dados A e B , definimos a união de A e B :

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

Outras operações com conjuntos: interseção e diferença:

$$A \cap B = \{Z \in A \mid Z \in B\} = \{Z \in B \mid Z \in A\}$$

$$A \setminus B = \{Z \in A \mid Z \notin B\}$$

União, interseção e diferença

Dado um conjunto X , existe o conjunto de todos os elementos de elementos de X . (Axioma da União)

$$\forall X \exists Y \forall Z, Z \in Y \leftrightarrow (\exists W ((Z \in W) \wedge (W \in X))).$$

Escrevemos $Y = \bigcup X$.

Dados A e B , definimos a união de A e B :

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{Z \mid (Z \in A) \vee (Z \in B)\}.$$

Outras operações com conjuntos: interseção e diferença:

$$A \cap B = \{Z \in A \mid Z \in B\} = \{Z \in B \mid Z \in A\}$$

$$A \setminus B = \{Z \in A \mid Z \notin B\}$$



Muitos autores escrevem em vez $A - B$.

Partes

Dado um conjunto X , seja

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X , também chamado de potência de X .

Partes

Dado um conjunto X , seja

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X , também chamado de potência de X .

A existência de $\mathcal{P}(X)$ é garantida pelo Axioma da Potência:

$$\forall X \exists Y \forall Z ((Z \in Y) \leftrightarrow (Z \subseteq X)).$$

Partes

Dado um conjunto X , seja

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

o conjunto das partes de X , também chamado de potência de X .

A existência de $\mathcal{P}(X)$ é garantida pelo Axioma da Potência:

$$\forall X \exists Y \forall Z ((Z \in Y) \leftrightarrow (Z \subseteq X)).$$

Assim, dado X e uma propriedade ϕ podemos definir

$$\mathcal{Y} = \{Y \subseteq X \mid \phi(Y)\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b , podemos formar um par ordenado (a, b) .

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b , podemos formar um par ordenado (a, b) .

A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b , podemos formar um par ordenado (a, b) .

A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b , podemos formar um par ordenado (a, b) .

A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Pares ordenados e produtos cartesianos

Dados a, b , podemos formar um par ordenado (a, b) .

A propriedade fundamental é

$$(a_0, b_0) = (a_1, b_1) \iff ((a_0 = a_1) \wedge (b_0 = b_1))$$

Uma construção possível é $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Verifique.

O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

A existência de $A \times B$ segue do Axioma da Potência junto com o Esquema de Seleção.