PROGRAMA DA DISCIPLINA/TURMA 3ZA PERÍODO: 2026.1

MAT 2614 ou 2615 **TÓPICOS DE ANÁLISE REAL**

CARGA HORÁRIA TOTAL: 45 HORAS

Nº CRÉDITOS: 3

PROFESSOR: Silvius Klein

TÍTULO DA DISCIPLINA: **Teoria da Medida II**

OBJETIVOS DA DISCIPLINA/TURMA

A disciplina tem por objetivo familiarizar os estudantes com tópicos mais avançados de teoria da medida, que não são normalmente lecionados num curso de medida e integração de um semestre.

O curso será útil para estudantes interessados em análise e EDP, teoria ergódica e até mesmo teoria da probabilidade, além de ser um curso de cultura geral e, portanto, interessante para qualquer aluno de pós graduação com suficiente maturidade matemática.

EMENTA DA DISCIPLINA

Medidas de Radon e o teorema de Riesz-Markov; a métrica de Wasserstein no espaço de probabilidades; esperança condicional e martingais; a função maximal de Hardy-Littlewood e o teorema de diferenciação de Lebesgue; diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas; o teorema ergódico; medida e dimensão de Hausdorff; medida de Haar.

PRÉ-REQUISITOS DA DISCIPLINA

MAT2621 Medida e integração.

MAT2304 (Teoria da Probabilidade I) e MAT2622 (Análise Funcional) são muito úteis, mas não completamente obrigatórios.

PROGRAMA DA DISCIPLINA/TURMA

Veja o anexo (as últimas duas páginas)

AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA

Critério 12

Média =G1

Listas de exercícios.
Apresentação de um seminário.

DETALHAMENTO AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA

Serão assinadas duas listas de exercícios a serem entregadas durante o semestre.

Cada aluno apresentará um seminário sobre tópicos avançados de teoria da medida, escolhidos pelo professor. O seminário será seguido por discussões e críticas.

Cada aluno também escreverá um texto sobre o tópico apresentado.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA DA DISCIPLINA

O professor disponibilizará notas de aula.

Além disso, alguns livros textos recomendados (contendo tópicos do curso) são os seguintes:

1. Elias M. Stein & Rami Shakarchi, Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Lectures in Analysis, vol III, Princeton University Press.

2. Terence Tao, An Introduction to Measure Theory, AMS.

3. Cédric Villani, Optimal Transport: Old and New, Springer.

4. Paul Halmos, Measure Theory, Springer.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR DA DISCIPLINA

1. Marcelo Viana & Krerley Oliveira, Fundamentos da Teoria Ergódica , SBM.

2. Lawrence Craig Evans & Ronald F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press.

BIBLIOGRAFIA DE PESQUISA DA DISCIPLINA

1. Camil Muscalu & Wilhelm Schlag, Classical and Multilinear Harmonic Analysis, vol I, Cambridge University Press.

PROGRAMA DA DISCIPLINA

1. O teorema de representação de Riesz-Markov
   1.1. Espaços de Hausdorff localmente compactos
   1.2. Medidas de Radon
   1.3. O teorema de Riesz-Markov
   1.4. Convergência fraca

[Evans] Cap. 1.8 e 1.9, [Halmos] Cap. X

2. O espaço de medidas de probabilidades
   2.1. A topologia fraca*
   2.2. Teorema Portmanteau
   2.3. A metrizabilidade da topologia fraca* (métrica de Levy-Prohorov)
   2.4. A distância de Wasserstein e suas propriedades

[Viana] Cap. 2, [Villani] Cap I.6

3. Elementos de teoria da probabilidade
   3.1. Independência
   3.2. Somas de variáveis independentes
   3.3. Tempos de parada
   3.4. Esperança condicionada
   3.5. Martingales, o teorema de convergência de Doob

[Schlag] Cap. 5, [Halmos] Cap. IX

4. O teorema fundamental do cálculo (parte 1) para a integral de Lebesgue
   4.1. O lema da cobertura de Vitali
   4.2 A função maximal de Hardy-Littlewood
   4.3 O teorema de diferenciação de Lebesgue
   4.4 Pontos de densidade de Lebesgue; conjunto de Lebesgue de uma função localmente integrável
   4.5. Aproximação da identidade

[Stein] Cap. 3.1 e 3.2

5. O teorema fundamental do cálculo (parte 2) para a integral de Lebesgue
   5.1. Funções de variação limitada
   5.2. O lema do sol nascente
   5.3 Diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas
   5.4. Comprimento de curvas retificáveis

[Stein] Cap. 3.3 e 4, [Tao] Cap. 1.6

6. O teorema ergódico (via funções maximais)
    6.1. Transformações que preservam medida, médias temporais
    6.2. O teorema ergódico médio
    6.3. O teorema ergódico maximal
    6.4. O teorema ergódico de Birkhoff
    6.5. Medidas ergódicas

[Stein] Cap. 6.5

7. Medida e dimensão de Hausdorff
    7.1. Medida de Hausdorff
    7.2. Dimensão de Hausdorff; exemplos; auto similaridade

[Stein] Cap. 7.1 e 7.2, [Evans] Cap. 3

8. Medida de Haar* (sujeito à disponibilidade de tempo)
    8.1. Existência da medida de Haar
    8.2 Unicidade da medida de Haar
    8.3 Regularidade da medida de Haar

[Halmos], Cap. XI, XII