

PUC-Rio
Desafio em Matemática
27 de novembro de 2020

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)** Jorge joga um jogo de paciência usando um baralho com N cartas numeradas de 1 a N ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 10$). Ele inicialmente embaralha bem as cartas. Depois, ele vai tirando cartas uma por uma. Se a carta tiver valor maior do que as anteriores, ele pousa a carta na mesa ao lado das outras (com o número visível). Se a carta tiver valor menor do que alguma carta anterior o jogo termina (e a nova carta não é pousada sobre a mesa).
 - (a) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com uma única carta sobre a mesa? Ou seja, qual é a probabilidade de que a segunda carta tenha valor menor do que a primeira?
 - (b) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com exatamente duas cartas sobre a mesa?
 - (c) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com exatamente três cartas sobre a mesa?

2. **(1,5 ponto)** Um hexágono convexo é *equiângulo* se todos os ângulos internos são iguais a $2\pi/3$ (ou 120°). Um hexágono convexo e equiângulo é *inscritível* se existir um círculo passando pelos seis vértices.
- (a) Seja $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ um hexágono convexo e equiângulo.
Seja $\ell_k = |A_{k-1}A_k|$ o comprimento do lado $A_{k-1}A_k$
(com a convenção $A_6 = A_0$).
Dados $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$, calcule ℓ_5, ℓ_6 a área S do hexágono.
- (b) Diga se existe um hexágono convexo, equiângulo e inscritível com todos os lados inteiros e área $S = 2020\sqrt{3}$.

3. **(1,5 ponto)** Para cada uma das identidades abaixo, encontre todos os polinômios reais P que a satisfazem (para todo $x \in \mathbb{R}$). Justifique sua resposta.

(a) $P(2x) = 4P(x)$.

(b) $P(x+1) - P(x-1) = x^2$.

(c) $P(2x+1) - P(2x-1) = 4(P(x+1) - P(x-1))$.

4. **(2,0 pontos)** Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Dados dois números reais positivos x, y , defina

$$g_{(x,y)} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_{(x,y)}(t) = |\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid ax + by \leq t\}|.$$

Aqui $|X|$ denota o número de elementos do conjunto X .

Assim, por exemplo,

$$g_{(2,2)}(4) = |\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}| = 6,$$

$$g_{(1,4)}(4) = |\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (0, 1)\}| = 6.$$

- (a) Calcule $g_{(2,2)}(8)$, $g_{(1,4)}(8)$, $g_{(2,2)}(9)$ e $g_{(1,4)}(9)$.
- (b) Diga se existe algum valor de t para o qual tenhamos $g_{(2,2)}(t) > g_{(1,4)}(t)$.
- (c) Determine para quais valores de $z \in (0, +\infty)$ vale a condição abaixo.
Para todo $t \in [0, +\infty)$ temos $g_{(z,z)}(t) \leq g_{(1,3)}(t)$.

5. **(2,0 ponto)** Para k inteiro, $k > 2$, seja $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{k} + \frac{2k-2}{k^2} \cos(t) + \frac{2k-4}{k^2} \cos(2t) + \cdots + \frac{2}{k^2} \cos((k-1)t) \\ &= \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2k-2j}{k^2} \cos(jt). \end{aligned}$$

Para cada uma das equações abaixo, determine quantas soluções reais distintas ela admite no intervalo $t \in (-\pi, \pi]$.

(a) $f_k(t) = 1$

(b) $f_k(t) = 0$

(c) $f_k(t) = \frac{1}{4}$

A sua resposta deve ser dada em função de k ; simplifique.

6. **(2,0 ponto)** As sequências de Fibonacci e de Lucas são definidas recursivamente:

$$\begin{aligned}F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, & F_0 &= 0, & F_1 &= 1, \\L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n, & L_0 &= 2, & L_1 &= 1.\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $L_2 = 3$, $L_3 = 4$ e $L_4 = 7$.

Seja $p \geq 2$ um número primo. Dizemos que p é *azul* se existir um inteiro positivo k tal que L_k seja múltiplo de p . Assim, por exemplo, $p = 7$ é azul pois L_4 é múltiplo de p . Por outro lado, dizemos que p é *vermelho* se não existir nenhum inteiro positivo k para o qual L_k seja múltiplo de p .

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

- (a) Existem infinitos primos azuis.
- (b) Existem infinitos primos vermelhos.

