

PUC-Rio
Desafio em Matemática
03 de dezembro de 2021

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja $p(x) = 2x^2 - 1$. Resolva as inequações abaixo:

(a) $|p(x)| \leq 1$

(b) $p(x) \leq 0$

(c) $p(p(x)) \leq 0$

2. Seja k um inteiro positivo. Um inteiro n é k -idempotente se valer $1 < n < 10^k$ e o resto da divisão de n^2 por 10^k for igual a n .

Note que para calcular o resto da divisão de um inteiro positivo m por 10^k basta tomar os k últimos algarismos de m .

Assim, por exemplo, 5 e 6 são 1-idempotentes pois $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$ deixam restos 5 e 6 respectivamente na divisão por 10.

Analogamente, 76 é 2-idempotente pois $76^2 = 5776$.

- (a) Encontre todos os inteiros 3-idempotentes.
- (b) Quantos inteiros são 2021-idempotentes?

3. Eugênio sorteia um número natural da seguinte forma:
ele joga simultaneamente 4 dados comuns
(cubos com 6 faces numeradas de 1 a 6)
e *multiplica* os números que aparecem.

Por exemplo, se os dados mostrarem 2, 2, 5, 6, o número sorteado será 120.

- (a) Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja igual a 720?
- (b) Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior do que 700?

4. Sejam $P_1, \dots, P_4$ os pontos de coordenadas:

$$P_1 = (1, -5), \quad P_2 = (7, 7), \quad P_3 = (-5, 1), \quad P_4 = (-3, -3).$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos Q com a seguinte propriedade:

Existe uma elipse $\mathcal{E}_Q$ que, traçada no sentido anti-horário, passa pelos pontos Q, P_1, P_2, P_3 e P_4 , nessa ordem.

(Interpretamos que $P_1, P_2, P_3, P_4 \notin U$.

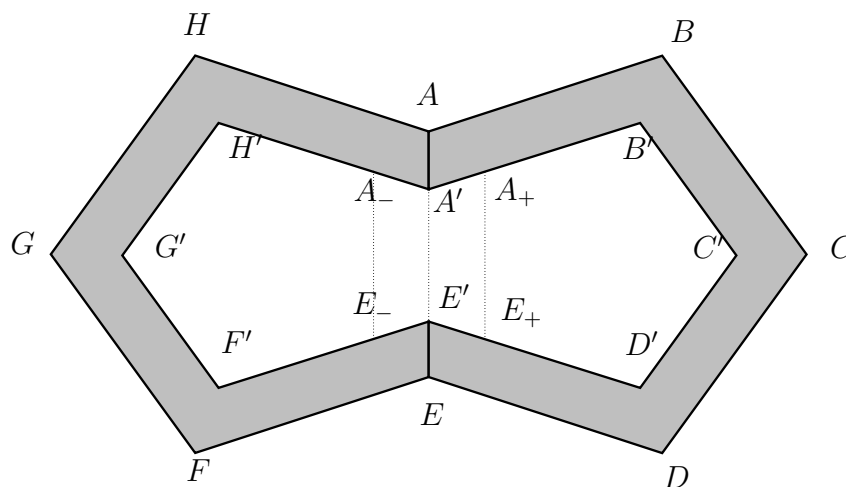
Consideramos um círculo como uma elipse.)

(a) Diga se cada um dos seguintes pontos pertence ao conjunto U :

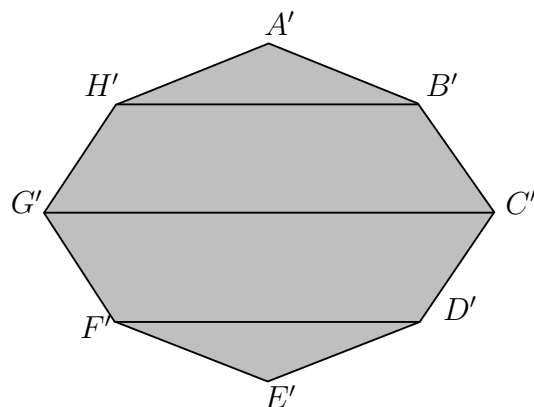
$$Q_{-4} = (0, -4), \quad Q_{-\frac{32}{7}} = \left(0, -\frac{32}{7}\right), \\ Q_{-5} = (0, -5), \quad Q_{-6} = (0, -6), \quad Q_{-8} = (0, -8).$$

(b) Quantos elementos tem a interseção $U \cap \mathbb{Z}^2$, ou seja, quantos pontos de coordenadas inteiras pertencem a U ?

5. Alice quer construir um sólido baseado no dodecaedro colando 12 peças de cartolina que podem ser dobradas ao longo de segmentos de reta para definir faces planas. As peças vêm em dois tipos, 6 de cada tipo.



A figura acima mostra o primeiro tipo de peça. Os pentágonos $ABCDE$ e $AEFGH$ são regulares de aresta a . Os pentágonos $A_+B'C'D'E_+$ e $A_-E_-F'G'H'$ são regulares de aresta b , concêntricos a $ABCDE$ e $AEFGH$, respectivamente. A região central $A'B'C'D'E'F'G'H'$ é um furo. A peça só pode ser dobrada ao longo do segmento AE (que passa por A' e por E').

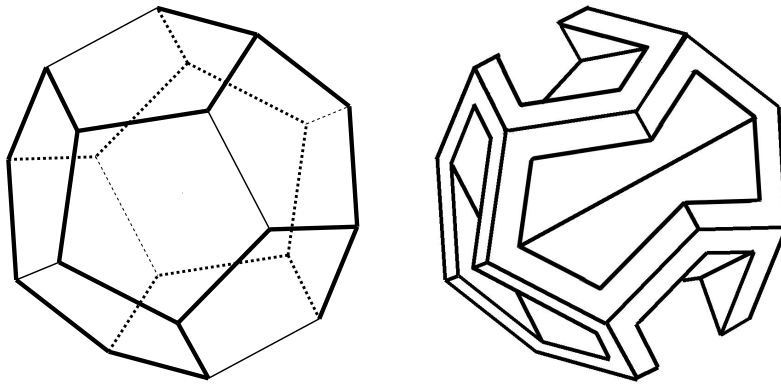


A segunda figura mostra o segundo tipo de peça (ângulos e distâncias não são mostrados fielmente). A peça só pode ser dobrada ao longo dos segmentos $B'H'$, $C'G'$ e $D'F'$. Usamos uma peça do segundo tipo para preencher o furo de uma peça do primeiro tipo, casando as letras. Assim, por exemplo, colamos o segmento $A'B'$ da peça do primeiro tipo no segmento $A'B'$ da peça do segundo tipo, juntando A' com A' .

Em particular, os segmentos $A'B'$ devem ter o mesmo comprimento em peças do primeiro e do segundo tipo. Segmentos $B'C'$ devem ter comprimento b em peças do primeiro e do segundo tipo.

Assim, formamos seis pares de peças, cada par consistindo de uma peça de cada tipo. Para cada par, juntamos as peças como descrito acima.

Depois disso colamos os seis pares. Os vértices e arestas exteriores de peças do primeiro tipo devem formar um dodecaedro regular. As seis arestas interiores aos seis pares, obtidas dobrando peças do primeiro tipo ao longo do segmento AE , devem ser paralelas ou ortogonais duas a duas.



A primeira figura acima mostra o dodecaedro regular, indicando as posições onde devem entrar os pares de peças. A segunda figura mostra o sólido assim obtido.

- (a) Em função de a e b , quanto medem os segmentos $C'G'$ e $B'H'$ em uma peça do segundo tipo?
- (b) Em função do valor de a , para quais valores de b é possível realizar a construção?

A cartolina aqui é idealizada: desprezamos a sua espessura e imaginamos que as partes planas são perfeitamente planas.

Mas um pedaço de cartolina não pode passar através de outro!

6. Victor tem um baralho com cartas numeradas de 1 a n . Ele faz uma fileira com as cartas, com os valores (os números mostrados nas cartas) visíveis. Ele agora joga uma paciência na qual, em alguns casos, é permitido trocar duas cartas de lugar. Sejam $p_1 < p_2$ as posições das duas cartas; sejam v_1 e v_2 os respectivos valores das duas cartas. A troca é permitida se e somente se valerem simultaneamente as duas seguintes condições:

- (i) v_1 e v_2 têm a mesma paridade, ou seja, ou os valores das duas cartas são ambos pares ou são ambos ímpares;
- (ii) cartas intermediárias não podem ter valores intermediários, ou seja, se $p_1 < p_x < p_2$ então $v_x \notin [v_1, v_2] \cup [v_2, v_1]$.

Por exemplo, se a posição das cartas for $(3, 2, 1, 5, 4, 6, 7)$, há quatro trocas permitidas, levando para as seguintes posições:

$$(5, 2, 1, 3, 4, 6, 7), (3, 2, 5, 1, 4, 6, 7), (3, 4, 1, 5, 2, 6, 7), (3, 2, 1, 5, 6, 4, 7).$$

Uma posição σ_1 é *acessível* a partir de outra posição σ_0 se existir uma sequência finita de movimentos permitidos começando em σ_0 e terminando em σ_1 . Assim, por exemplo, $(5, 3, 1, 6, 4, 2)$ é acessível a partir de $(1, 3, 5, 2, 4, 6)$ pois temos a sequência:

$$(1, 3, 5, 2, 4, 6) \rightarrow (3, 1, 5, 2, 4, 6) \rightarrow (5, 1, 3, 2, 4, 6) \rightarrow (5, 3, 1, 2, 4, 6) \rightarrow (5, 3, 1, 4, 2, 6) \rightarrow (5, 3, 1, 6, 2, 4) \rightarrow (5, 3, 1, 6, 4, 2).$$

Dado $k < n$, k ímpar, seja $\pi(k, n)$ a posição:

$$(k, k-1, \dots, 2, 1, k+1, k+2, \dots, n-1, n).$$

Assim, por exemplo, $\pi(3, 7) = (3, 2, 1, 4, 5, 6, 7)$ e $\pi(5, 7) = (5, 4, 3, 2, 1, 6, 7)$.

- (a) Quantas posições são acessíveis a partir de $\pi(3, n) = (3, 2, 1, 4, 5, \dots, n-1, n)$?
(A resposta deve ser dada em função de n .)
- (b) Para quais valores de k_0, k_1 e n temos que a posição $\pi(k_1, n)$ é acessível a partir da posição $\pi(k_0, n)$?

