

PUC-Rio
Desafio em Matemática
11 de dezembro de 2022

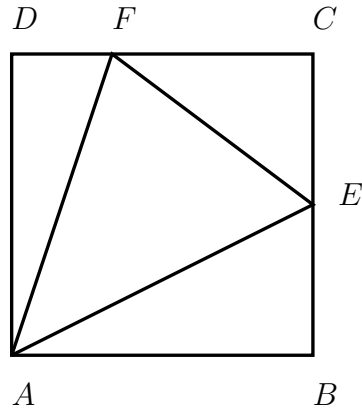
Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

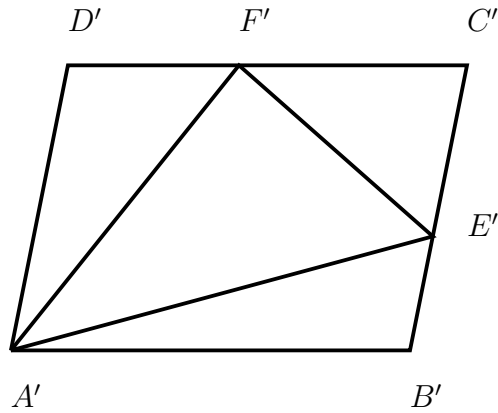
Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. (a) Seja $ABCD$ um quadrado. Seja E um ponto no lado BC . Seja F um ponto no lado CD . Traçamos os segmentos AE , AF e EF . Sabemos que a área do quadrado $ABCD$ é igual a 36, que a área do triângulo ABE é igual a 9 e que a área do triângulo ADF é igual a 6. Calcule a área do triângulo CEF .



- (b) Seja $A'B'C'D'$ um paralelogramo. Seja E' um ponto no lado $B'C'$. Seja F' um ponto no lado $C'D'$. Traçamos os segmentos $A'E'$, $A'F'$ e $E'F'$. Sabemos que a área do triângulo $A'B'E'$ é igual a 14, que a área do triângulo $A'D'F'$ é igual a 15 e que a área do triângulo $C'E'F'$ é igual a 12. Calcule a área do paralelogramo $A'B'C'D'$.



2. Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um poliedro convexo. Uma esfera S_c está circunscrita a P se S_c passar por todos os vértices de P . Uma esfera S_i está inscrita em P se S_i tangenciar todas as faces de P .

Um icosaedro regular é um poliedro com 12 vértices e 20 faces, todas triângulos equiláteros. Note que um icosaedro regular tem um centro, um ponto no seu interior equidistante dos 12 vértices.

Considere um icosaedro regular de centro O e seja r_c a distância do centro aos vértices. Dado $r_t \in \mathbb{R}$, $r_t < r_c$, traçamos 12 planos a uma distância r_t do centro O , cada plano ortogonal a um segmento ligando o centro O a um dos 12 vértices do icosaedro. Para r_t suficientemente próximo de r_c , as interseções desses planos com o icosaedro são 12 pentágonos regulares disjuntos.

- (a) Para quais valores de r_t vale que as interseções são 12 pentágonos regulares disjuntos?
- (b) Seja $r_t < r_c$ como no item anterior. Um *icosaedro truncado* é obtido a partir do icosaedro regular descartando as 12 pirâmides de base pentagonal obtidas cortando nos 12 planos. Para quais valores de r_t o icosaedro truncado admite uma esfera circunscrita?
- (c) Para quais valores de r_t o icosaedro truncado admite uma esfera inscrita?

3. Nesta questão, $\binom{n}{k}$ denota um número binomial:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Defina as sequências (a_k) e (b_k) por:

$$a_k = \sum_{0 \leq j \leq k} \binom{3k}{k-j} = \binom{3k}{k} + \binom{3k}{k-1} + \dots + \binom{3k}{1} + \binom{3k}{0};$$

$$b_k = \sum_{0 \leq j \leq k/3} \binom{3k}{k-3j} = \binom{3k}{k} + \binom{3k}{k-3} + \binom{3k}{k-6} + \dots$$

Assim, por exemplo,

$$a_0 = b_0 = \binom{0}{0} = 1, \quad a_1 = \binom{3}{1} + \binom{3}{0} = 4, \quad b_1 = \binom{3}{1} = 3.$$

- (a) Calcule a_2 , b_2 , a_3 e b_3 .
- (b) Diga para quais valores de $C > 0$ vale a condição abaixo:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k \geq C a_k.$$

Ou seja, para quais valores de $C > 0$ é verdade que:
para todo k vale $b_k \geq C a_k$.

4. Seja $f_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função definida por $f_0(x) = x$. Sejam $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas recursivamente por

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{3}{5} f_n(\frac{5x}{2}), & 0 \leq x \leq \frac{2}{5}, \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{5} f_n(5x - 2), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}, \\ \frac{2}{5} + \frac{3}{5} f_n(\frac{5x-3}{2}), & \frac{3}{5} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Faça esboços dos gráficos de f_1 e f_2 .
 (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $x_0, x_1 \in [0, 1]$ temos

$$|f_n(x_1) - f_n(x_0)| \leq \sqrt{|x_1 - x_0|}.$$

Ou seja:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0, x_1 \in [0, 1], \quad |f_n(x_1) - f_n(x_0)| \leq \sqrt{|x_1 - x_0|}.$$

5. A função piso (ou parte inteira) $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < 1 + \lfloor x \rfloor.$$

Seja $\alpha \in (1, 2)$ a única raiz real da equação $x^3 = x + 1$.

(a) Encontre uma aproximação racional p/q para α com

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{100}.$$

(b) Encontre o último algarismo (na expansão decimal usual) de

$$\lfloor \alpha^{2023} + \alpha \rfloor.$$

6. Arthur, Bianca e Clara disputam um jogo no qual Arthur e Bianca colaboram. Arthur e Bianca podem combinar uma estratégia antes de começarem. O jogo começa com Clara sozinha em uma sala com uma mesa e, sobre a mesa, uma fileira de n moedas. O valor de n é previamente conhecido por todos, assim como também todos sabem que as moedas estão enfileiradas. Arthur e Bianca não sabem, entretanto, quais moedas têm cara visível e quais têm coroa visível.

Clara então convida Arthur a entrar na sala e aponta para um conjunto de exatamente k moedas (dentre as n que estão sobre a mesa). O valor de k é previamente conhecido por todos e satisfaz $1 \leq k \leq n/2$. Arthur deve então selecionar exatamente k moedas e virá-las (mantendo as moedas enfileiradas); ou seja, se uma moeda selecionada mostrava cara, passa a mostrar coroa, e vice versa. Arthur pode selecionar as k moedas livremente, podendo tanto selecionar moedas apontadas por Clara quanto moedas não apontadas.

Depois disso, Arthur sai por uma porta e Bianca entra por outra. Arthur e Bianca não se encontram e não trocam informações. Bianca deve então identificar as k moedas apontadas por Clara. Se Bianca acertar exatamente o conjunto de k moedas apontadas por Clara, então Arthur e Bianca ganham o jogo. Se o conjunto de moedas identificadas por Bianca for diferente do conjunto de moedas apontadas por Clara, então Arthur e Bianca perdem.

- (a) Prove que para $n = 2$ e $k = 1$, Arthur e Bianca têm uma estratégia que permite ganhar sempre.
- (b) Prove que para $n = 3$ e $k = 1$, Arthur e Bianca **não** têm uma estratégia que permita ganhar sempre.
- (c) Para quais valores de (n, k) existe uma estratégia que garanta a vitória de Arthur e Bianca?

