

PUC-Rio
Desafio em Matemática
01 de outubro de 2023

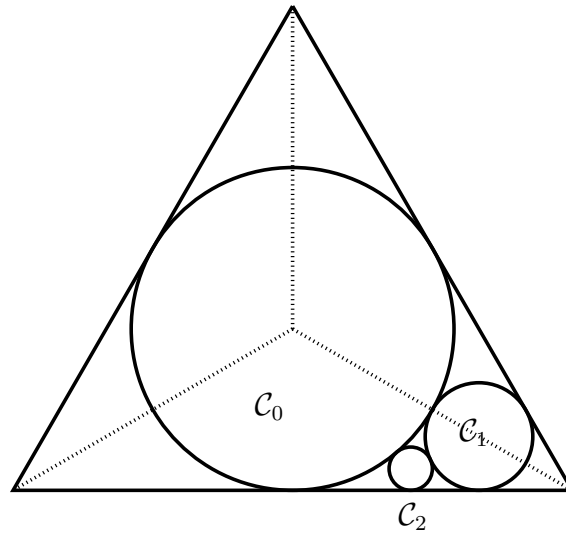
Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	2,0		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. A figura mostra um triângulo equilátero e três círculos.



Seja $\mathcal{C}_0$ o maior círculo, inscrito no triângulo; seja $r_0 = 1$ o raio de $\mathcal{C}_0$.

- (a) Seja $\mathcal{C}_1$ o círculo de tamanho médio na figura, tangente a $\mathcal{C}_0$ e a dois lados do triângulo. Calcule o valor de seu raio r_1 .
- (b) Seja $\mathcal{C}_2$ o menor círculo da figura, tangente a $\mathcal{C}_0$, a $\mathcal{C}_1$ e a um lado do triângulo. Calcule o valor de seu raio r_2 .

2. Queremos decorar banquinhos quadrados, com quatro pernas iguais, colando nele azulejos. Os azulejos são quadrados e todos do mesmo tamanho. Cada azulejo é pintado de uma única dentre k cores. Devemos colar quatro azulejos em cada banquinho. Os azulejos devem ser colados lado a lado, cobrindo um quadrado maior. Dois banquinhos são considerados iguais se diferem por uma rotação (por exemplo, de 90°) mas não se diferirem por uma reflexão.
- (a) Se $k = 2$ (ou seja, se só existem duas cores de azulejos), quantos banquinhos diferentes são possíveis?
 - (b) Em função de $k \in \mathbb{N}$, quantos banquinhos diferentes são possíveis?

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f(x, y) = 3x + 7|y| + |19x + 7|y||.$$

Para $z \in \mathbb{Z}$ (ou seja, z inteiro), seja $N(z)$ o número de soluções inteiras da equação $f(x, y) = z$:

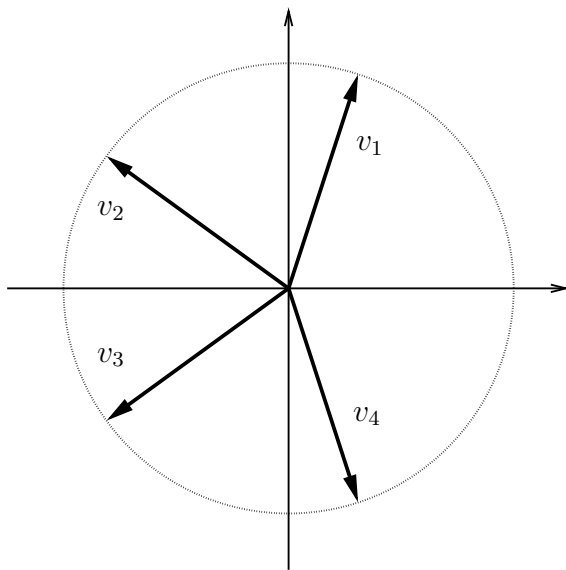
$$N(z) = |\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid f(x, y) = z\}|.$$

- (a) Calcule $f(1, 0)$, $f(-1, 0)$ e $f(0, 1)$.
- (b) Calcule $N(2024)$, $N(2026)$ e $N(2032)$.

4. Sejam $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^2$ os vetores

$$v_k = \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{5} \right), \sin \left(\frac{2k\pi}{5} \right) \right),$$

mostrados na figura.



Sejam $X_0 = \{(0, 0)\}$ e $X_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Para $n > 1$, seja

$$X_n = X_{n-1} + X_1 = \{u + v, u \in X_{n-1}, v \in X_1\}.$$

Equivalentemente (com $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$),

$$X_n = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4, a_k \in \mathbb{N}, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n\}.$$

- (a) Existe algum inteiro $n > 0$ tal que $(0, 0) \in X_n$?
- (b) Encontre os elementos de X_{199} de módulo mínimo.

5. Em um jogo, Rick repete muitas vezes um sorteio. A cada sorteio ele tem probabilidade $1/3$ de ganhar 2 pontos, probabilidade $1/3$ de ganhar 1 ponto e probabilidade $1/3$ de perder 1 ponto. Cada sorteio é independente dos anteriores.
- (a) Se em um dado momento Rick tem $n \geq 0$ pontos, qual é a probabilidade de que ele nunca fique com um número estritamente negativo de pontos, por mais longo que seja o jogo?
 - (b) Se em um dado momento Rick tem $N - n$ pontos (com N, n inteiros e $n > 0$), qual é a probabilidade de que em algum momento (de um jogo suficientemente longo) Rick tenha *exatamente* N pontos?

6. Os polinômios P_n na variável z (para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) são definidos recursivamente por $P_0 = 0$, $P_1 = z$ e

$$P_{n+1} = (2n+1)P_n - z^2 P_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Assim, por exemplo,

$$P_2 = 3z, \quad P_3 = 15z - z^3, \quad P_4 = 105z - 10z^3, \quad P_5 = 945z - 105z^3 + z^5.$$

- (a) Quantas raízes reais o polinômio P_n tem no intervalo $[-3, 3]$?
Sua resposta deve ser dada em função de $n > 0$.
Discuta a multiplicidade das raízes.
- (b) Quantas raízes reais o polinômio P_n tem no intervalo $[3, \sqrt{10}]$?
Sua resposta deve ser dada em função de $n > 0$.
Discuta a multiplicidade das raízes.

