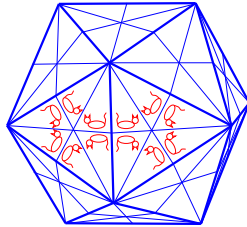


Desafio Nicolau Saldanha, PUC-Rio

Nível 3

12 de julho de 2026



Nome: _____

Assinatura: _____ CPF: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	1,5		
5	2,0		
6	2,5		
Nota final	10,0		

Instruções

- A prova tem duração de 4 horas.
- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

Para um inteiro n , seja P_n o polinômio

$$P_n(x) = x^2 + 5nx + 4n^2.$$

(a) Para quais valores inteiros de n a equação

$$P_n(x) = 19$$

admite solução inteira?

(b) Para quais valores inteiros de n a equação

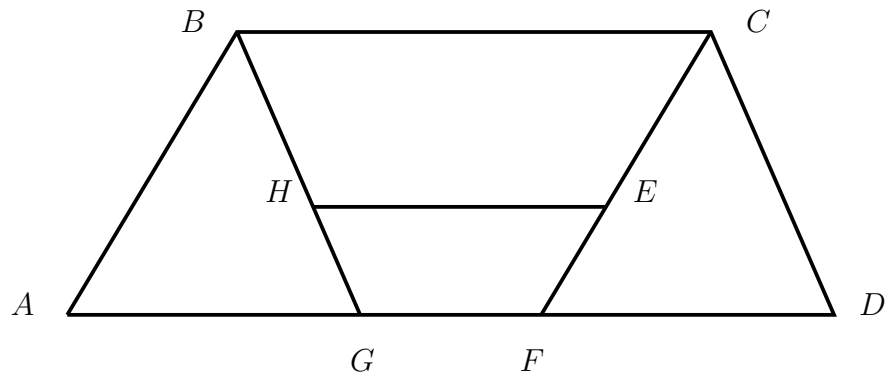
$$P_n(x) = 2027$$

admite solução racional?

2. (1,5 ponto)

Sejam $ABCD$, $CEHB$ e $EFGH$ trapézios semelhantes, com G e F no segmento AD como mostrado na figura.

Assim, por exemplo, os ângulos $\widehat{DAB}$, $\widehat{BCE}$ e $\widehat{HEF}$ são iguais.



- (a) Calcule a razão entre os comprimentos de AD e BC .
- (b) Seja I o ponto de interseção entre os segmentos BE e CH . Calcule a razão entre os comprimentos de AC e HI .

3. (1,5 ponto)

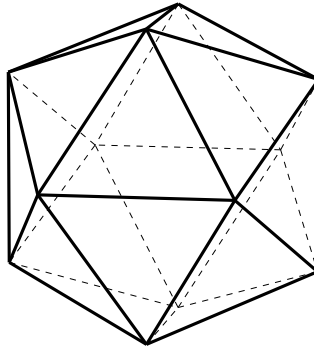
Devemos montar uma tabela $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2027}$ de números inteiros satisfazendo as seguintes condições:

- A tabela tem 2 linhas e 2027 colunas.
- Cada linha tem 2027 números inteiros distintos.
- O conjunto de números que aparecem na primeira linha é igual ao conjunto de números que aparecem na segunda linha.
- Em cada coluna j temos que $2m_{1j} - m_{2j}$ é um múltiplo de 19.

Seja L a quantidade de números na primeira linha que são múltiplos de 19. Quais são os possíveis valores de L ?

4. (1,5 ponto)

Considere um icosaedro regular.



Dois vértices distintos são *adjacentes* se forem os extremos de uma aresta e são *antípodos* se o segmento de reta ligando os vértices passar pelo centro do icosaedro.

Escolhemos aleatoriamente três vértices distintos do icosaedro, com igual probabilidade para cada conjunto de três vértices.

- (a) Qual é a probabilidade que *não* tenhamos escolhido dois vértices antípodos?
- (b) Qual é a probabilidade que *não* tenhamos escolhido dois vértices adjacentes?

5. **(2,0 pontos)**

Temos uma caixa cúbica de aresta igual a 2027 e blocos de dimensões $2 \times 2 \times 1$.

Queremos guardar os blocos na caixa.

Os blocos devem ser posicionados de tal forma que as arestas de cada bloco sejam paralelas às arestas da caixa.

A distância de cada face do bloco até a face paralela da caixa deve ser um inteiro.

Encontre o maior valor de N para o qual conseguimos guardar N blocos na caixa.

Descreva uma configuração que realize esse número máximo.

6. **(2,5 pontos)**

Seja $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do plano de coordenadas inteiras.

(a) Seja $\mathcal{C}_a$ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.
Quantos pontos tem a interseção $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}_a$?

(b) Diga se existe uma circunferência $\mathcal{C}_b$ tal que a interseção $\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{C}_b$ tenha exatamente 2027 pontos.

