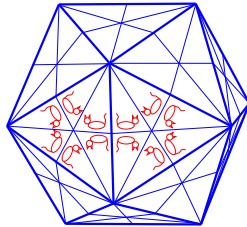


PUC-Rio
Desafio Nicolau Saldanha
25 de agosto de 2024



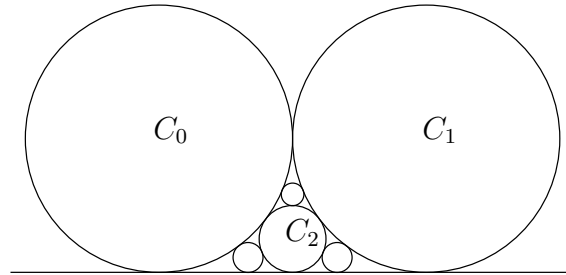
Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	2,0		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. A figura mostra uma reta horizontal r e seis círculos. Os dois maiores círculos C_0 e C_1 têm raios $R_0 = R_1 = 1$.



- (a) O círculo C_2 é tangente a r , a C_0 e a C_1 . Calcule o valor de seu raio.
- (b) Cada um dos três círculos menores é definido por três tangências.
Um círculo é tangente a r , C_0 e C_2 . Outro é tangente a r , C_1 e C_2 .
O terceiro é tangente a C_0 , C_1 e C_2 .
Calcule os valores dos raios desses três círculos.

2. Seja P o polinômio

$$P(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y}{2}.$$

- (a) Prove que existem apenas finitos pares $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ com $P(x, y) = 2024$.
Encontre todos esses pares.
($\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)
- (b) Para cada um dos quatro quadrantes do plano xy , diga quantos pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ existem nesse quadrante com $P(x, y) = 2024$.

3. Seja $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real definida por

$$g(x) = \csc^2(\pi x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi x)}.$$

Simplifique as expressões abaixo:

(a)

$$\begin{aligned} G_1 = \sum_{k=0}^6 g\left(\frac{3k+1}{21}\right) &= g\left(\frac{1}{21}\right) + g\left(\frac{4}{21}\right) + g\left(\frac{7}{21}\right) + g\left(\frac{10}{21}\right) + \\ &\quad + g\left(\frac{13}{21}\right) + g\left(\frac{16}{21}\right) + g\left(\frac{19}{21}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{k=0}^9 (-1)^k g\left(\frac{4k+1}{40}\right) = \\ &= g\left(\frac{1}{40}\right) - g\left(\frac{5}{40}\right) + g\left(\frac{9}{40}\right) - g\left(\frac{13}{40}\right) + g\left(\frac{17}{40}\right) \\ &\quad - g\left(\frac{21}{40}\right) + g\left(\frac{25}{40}\right) - g\left(\frac{29}{40}\right) + g\left(\frac{33}{40}\right) - g\left(\frac{37}{40}\right) \end{aligned}$$

4. Um dado comum é um cubo com faces equiprováveis numeradas de 1 a 6.

Para sortear um inteiro positivo usando dados comuns,

Gary lança simultaneamente n dados comuns e soma os números obtidos.

O valor do inteiro positivo n é definido com antecedência.

Assim, se $n = 4$, Gary deve lançar 4 dados comuns e somar os resultados.

Se os quatro dados marcarem 2, 3, 3 e 5 então o número sorteado é igual 13.

- (a) Em função de n , qual é a probabilidade de que o número sorteado seja múltiplo de 3?
- (b) Em função de n , qual é a probabilidade de que o número sorteado seja múltiplo de 4?

5. As funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) são definidas recursivamente por $f_0(x) = x/5$ e

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}f_n(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ x - \frac{2}{5}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{4}{15} - \frac{1}{3}f_n(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Assim, por exemplo, $f_1(0) = 0$, $f_1(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{15}$, $f_1(\frac{2}{3}) = \frac{4}{15}$, $f_1(1) = \frac{1}{5}$ e

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ x - \frac{2}{5}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{5} - \frac{x}{5}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

- (a) Para quaisquer $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_0 < n_1$ e para qualquer $x \in [0, 1]$ temos

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_0}(x)| \leq \frac{1}{5 \cdot 3^{n_0}}.$$

- (b) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $x_0, x_1 \in [0, 1]$ temos

$$|f_n(x_1) - f_n(x_0)| \leq |x_1 - x_0|.$$

- (c) Sejam $x_0, x_1 \in [0, 1]$ com $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Seja $d > 0$ com $d < x_1 - x_0$. Existem $n, \ell \in \mathbb{N}$ e $u_0, u_1, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell \in [0, 1]$ com:

$$x_0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{\ell-1} < u_\ell = x_1,$$

$$\begin{aligned} d &< \sum_{k=0}^{\ell-1} |f_n(u_{k+1}) - f_n(u_k)| = \\ &= |f_n(u_1) - f_n(u_0)| + \dots + |f_n(u_\ell) - f_n(u_{\ell-1})| \leq x_1 - x_0. \end{aligned}$$

6. A *parte inteira* de um número real x é o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ satisfazendo

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Assim, por exemplo, $\lfloor \pi/2 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor 8\pi \rfloor = 25$.

Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

- (a) Existe um número irracional $\alpha \in (1, 2)$ tal que, para todo inteiro $n > 0$ temos

$$\lfloor \alpha^2 n \rfloor - \lfloor \alpha \lfloor \alpha n \rfloor \rfloor = 1.$$

- (b) Existem infinitos números irracionais distintos $\alpha \in (1, 2)$ satisfazendo a propriedade do item anterior, ou seja, tais que, para todo inteiro $n > 0$ temos

$$\lfloor \alpha^2 n \rfloor - \lfloor \alpha \lfloor \alpha n \rfloor \rfloor = 1.$$

