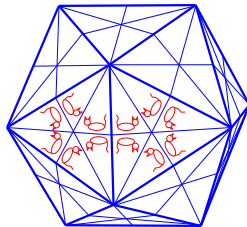


Desafio Nicolau Saldanha, PUC-Rio

Nível: Universitário

12 de julho de 2026



Nome: _____ Universidade: _____
Assinatura: _____ CPF: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2,0		
2	2,0		
3	2,0		
4	2,0		
5	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- A prova tem duração de 4 horas.
- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja $f : (-1/2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo

$$\forall x \in (-1/2, +\infty), f(x+1) = \sin(f(x)).$$

Sabemos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ e $f^{(3)}(0) = 5$.

(a) Calcule $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ e $f^{(3)}(1)$.

(b) Calcule $f(2027)$, $f'(2027)$, $f''(2027)$ e $f^{(3)}(2027)$.

2. Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos inteiros não negativos.
A função de Ackerman $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é definida recursivamente por

$$\begin{aligned} A(0, n) &= n + 1, & A(m + 1, 0) &= A(m, 1), \\ A(m + 1, n + 1) &= A(m, A(m + 1, n)). \end{aligned}$$

(a) Calcule $A(1, 0)$, $A(2, 0)$, $A(3, 0)$ e $A(4, 0)$.

(b) Seja

$$I_4 = \{A(m, n); m, n \in \mathbb{N}, m \geq 4\}.$$

Quantos números primos existem no conjunto I_4 ?

3. O *traço* de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é

$$\text{tr}(A) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk}.$$

Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *positiva definida* se e somente se

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad (v \neq 0) \rightarrow (v^\top A v > 0).$$

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justifique.

- (a) Para todo inteiro positivo n ,
se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são simétricas positivas definidas então

$$\det(AB) \leq \left(\frac{\text{tr}(AB)}{n} \right)^n.$$

- (b) Para todo inteiro positivo n ,
se $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são simétricas positivas definidas então

$$\det(ABC) \leq \left(\frac{\text{tr}(ABC)}{n} \right)^n.$$

4. Seja $X = \{1, 2, \dots, 2026\} = \{j \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq j \leq 2026\}$.
Se $f : X \rightarrow X$, $j \in X$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, escrevemos

$$f^k(j) = f(f(\dots f(j) \dots))$$

onde há k níveis de f do lado direito. Temos portanto

$$f^1(j) = f(j), \quad f^{k+1}(j) = f(f^k(j)).$$

Temos, por exemplo, $f^4(j) = f(f(f(f(j))))$.

Miguel escolhe secretamente uma função $f : X \rightarrow X$.

Guilherme não sabe qual é a função f , mas pode fazer perguntas a Miguel.

Em cada pergunta, Guilherme escolhe um inteiro $j \in X$

e um inteiro positivo k e Miguel informa o valor de $f^k(j)$.

Se Guilherme tem o direito de fazer no máximo 100 perguntas,

diga se Guilherme consegue descobrir $j_\star \in X$ e um inteiro positivo T

para os quais:

$$f^T(j_\star) = j_\star; \quad \forall t \in \mathbb{Z}, ((0 < t < T) \rightarrow (f^t(j_\star) \neq j_\star)).$$

5. (a) Seja $P_a \subset \mathbb{R}^2$ um polígono convexo.
Sabemos que existe um ponto Q_a no interior de P_a
com a seguinte propriedade:
toda reta que passa por Q_a divide o polígono P_a
em duas regiões com a mesma área.
Demonstre que o número de vértices de P_a é par.
- (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa; justifique.
Seja $P_b \subset \mathbb{R}^3$ um poliedro convexo.
Sabemos que existe um ponto Q_b no interior de P_b
com a seguinte propriedade:
todo plano que passa por Q_b divide o poliedro P_b
em duas regiões com o mesmo volume.
Então o número de vértices de P_b é par.

