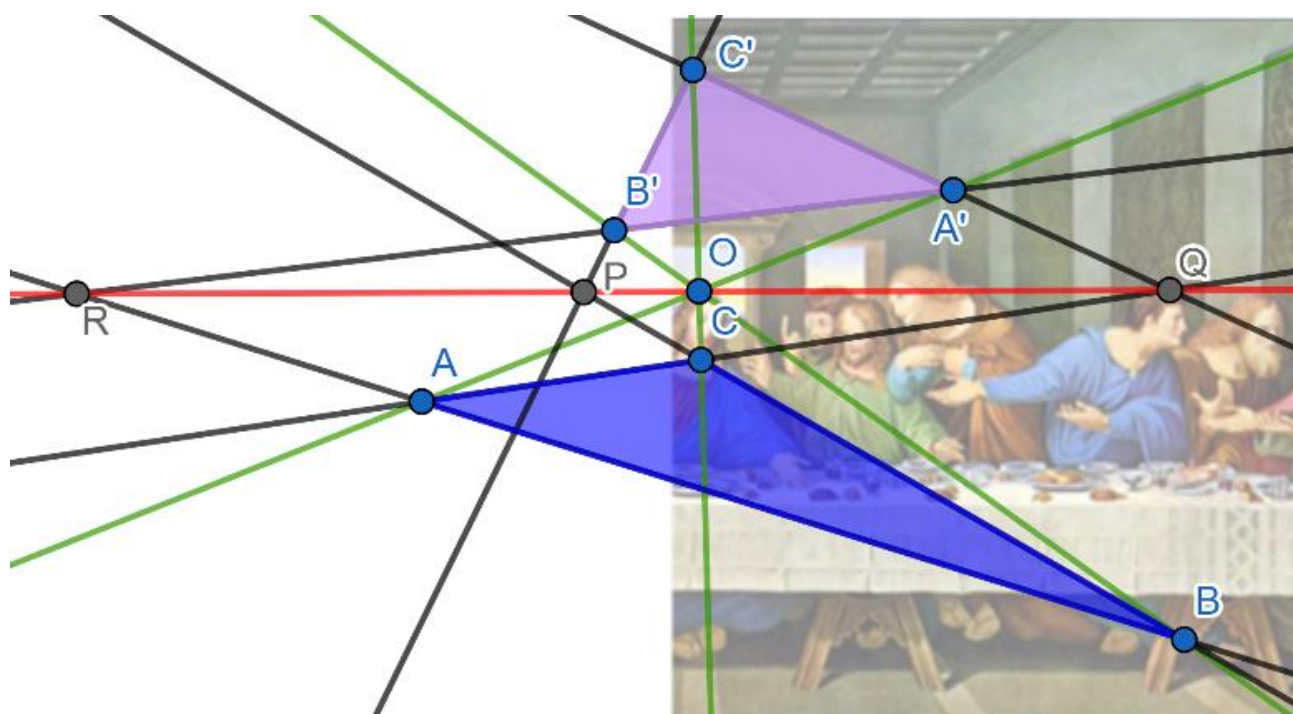


UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR DO TEOREMA DE DESARGUES

O ENSINO DA PERSPECTIVA NA MATEMÁTICA E NA ARTE



Felipe Assis da Costa
Orientador: Prof. Marcos Craizer

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO





Felipe Assis da Costa

Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues

O Ensino da Perspectiva na Matemática e na Arte

Produto Educacional

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro,
fevereiro de 2024

Apresentação

Este produto educacional foi elaborado a partir da dissertação de mestrado intitulada “Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues” produzida por Felipe Assis da Costa e orientada pelo Professor Doutor Marcos Craizer. Este apresentará uma série de quatro atividades que propõe de maneira articulada entre a Matemática e a Arte, uma visão de trabalho interdisciplinar utilizando o Teorema de Desargues na Educação Básica, neste caso para turmas do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental, no qual se abordam questões relacionadas a Perspectivas, entre outros conceitos.

A Criação deste produto educacional vem de encontro as propostas da Base Nacional Curricular, apresentando a professores das disciplinas, em especial de Matemática e Arte, algumas possibilidades de diversificar metodologias, formalizar competências e habilidades tão exigidas num contexto complexo e interconectado como o que vivemos atualmente.

Estas atividades tem o intuito de abrir o diálogo entre as disciplinas, retirá-las dos seus universos de gavetas e conectá-las com o auxílio de diversas estratégias, inclusive se valendo do uso da tecnologia, esta reconhecida pela BNCC como estratégia focal para o desenvolvimento das competências necessárias ao século XXI.

O ato de ensinar Matemática não deve ser visto ainda de maneira tradicional, em que o ensino resume-se na aprendizagem mecanizada, com a repetição de informações inquestionáveis, contribuindo para o desinteresse do estudante por esta ciência; e muito menos no simples exercício do emprego dos recursos tecnológicos, mas como um espaço capaz de orientar os sujeitos sociais a atuarem como cidadãos, criticamente, neste novo mundo moldado a partir do avanço tecnológico (Borba, 1999, apud Costa & Lacerda, 2014, p. 43).

Ressaltamos que a série de atividades que serão apresentadas não são absolutas, podem e devem contar com a colaboração dos professores envolvidos para adaptações as realidades de cada turma. Nota-se ainda a possibilidade de interconexão com outras disciplinas, como a História, mas que não serão oportunizadas neste material e ficam a critério dos utilizadores.

Sumário

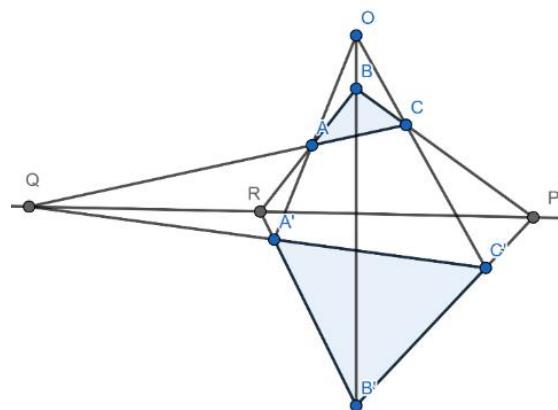
I. <u>A Geometria Projetiva e Girard Desargues</u>	5
II. <u>Objetivos, Competências e Habilidades</u>	7
III. <u>Atividades:</u>	10
<u>ATIVIDADE 1: LENDO A MATEMÁTICA NO MUNDO DA ARTE</u>	10
<u>1ª Etapa:</u> Introdução e Motivação	10
<u>2ª Etapa:</u> Coleta das pesquisas dos alunos e montagem da mostra das Obras de Arte/Matemática.	10
<u>3ª Etapa:</u> Hora de criar o link de definições.	11
<u>ATIVIDADE 2: OFICINA DE FOTOGRAFIA</u>	13
<u>1ª Etapa:</u> Vamos fotografar?!	13
<u>2ª Etapa:</u> Hora da pesquisa.	14
<u>ATIVIDADE 3: O TEOREMA DE DESARGUES E A TECNOLOGIA</u>	15
<u>1ª Etapa:</u> Desenhando o Teorema.	15
<u>2ª Etapa:</u> Hora de testar novas possibilidades e expor os trabalhos.	17
<u>ATIVIDADE 4: CONSTRUINDO A PERSPECTIVA A PARTIR DE UM PONTO</u>	19
<u>1ª Etapa:</u> Introdução e motivação.	19
<u>2ª Etapa:</u> Desenho em Perspectiva.	19
IV. <u>Referências:</u>	22
<u>ANEXOS</u>	23
<u>Anexo I:</u> Obras de Arte do Renascimento com influência da Perspectiva.	24
Delivery of the Keys, de Pietro Perugino	24
A Última Ceia, de Leonardo da Vinci	25
<u>Anexo II:</u> Adaptação de A Última Ceia com Ponto de Fuga e Linha do Horizonte.	26
<u>Anexo III:</u> Termos no Universo da Arte e da Matemática	27
<u>Anexo IV:</u> Guias de Construção para o Geogebra	28
G1 – Caso Base	29
G2 – Retas Paralelas	31
G3 – Um Lado Paralelo	33
G4 – Três Lados Paralelos	35
<u>Anexo V:</u> Guias de Construção com Régua Esquadro	37
G1 – Caso Base	38
G2 – Retas Paralelas	39
G3 – Um Lado Paralelo	40
G4 – Três Lados Paralelos	41
<u>Anexo VI:</u> Fotos com exemplos das Construção com Régua Esquadro	42
<u>Anexo VII:</u> Exemplos de desenhos em perspectiva	46

I. A Geometria Projetiva e Girard Desargues

Podemos dizer que a Geometria Projetiva teve seu início já do Egito antigo, com Euclides, em "Os Elementos", e observando a história até o Renascimento com Leonardo da Vinci, Gentile Bellini e Sandro Botticelli explorando a perspectiva, é perceptível uma trajetória de evolução. No século XVII, sob as iniciativas de Girard Desargues, temos avanços significativos na fundamentação matemática das projeções. No século XIX, Jean-Victor Poncelet e August Ferdinand Möbius contribuíram com conceitos cruciais, unindo a geometria projetiva à teoria das máquinas e explorando transformações geométricas preservadoras de relações projetivas. Mais recentemente no século XX, com o auxílio da álgebra linear, a geometria projetiva foi capaz de formalizar conceitos mais abstratos. Nos tempos atuais ela rompe os limites da matemática, com aplicações em disciplinas como arte, computação gráfica e modelagem tridimensional, deixando evidente sua constante evolução e resiliência, sempre impulsionada por contribuições de pensadores visionários e sua integração com diversas áreas do conhecimento.

Entre estes pensadores visionários Girard Desargues obtém destaque, originário de Condrieu, perto de Lyon, Desargues nasceu em 1591 e se destacou como engenheiro militar após iniciar seus estudos em arquitetura, disciplina intimamente relacionada à matemática na época. Sua obra mais notável, publicada em 1639, apresentou o "Teorema de Desargues", crucial para o desenvolvimento da geometria projetiva, só obteve o devido reconhecimento anos depois da morte de seu autor. Este teorema estabelece condições para a projeção de figuras geométricas entre planos diferentes, contribuindo significativamente para o entendimento geométrico e o estudo das perspectivas.

Teorema (Desargues). Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$, então P , Q e R são colineares se, e só se, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas.



Teorema de Desargues
Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

Podemos separar e melhor analisar este teorema em duas perspectivas:

- (i) *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta;*
- (ii) *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

Dizemos que duas figuras são perspectivas se os seus pontos podem ser colocados em uma correspondência biunívoca de forma que um par de pontos correspondentes definem retas concorrentes ou se retas podem ser colocadas em uma correspondência biunívoca de forma que par de retas correspondentes definem pontos colineares. O Teorema de Desargues diz respeito a triângulos em perspectiva. A primeira correspondência é dita perspectividade por um ponto, chamado centro da perspectividade, enquanto a segunda correspondência é dita perspectividade por uma reta, chamada eixo da perspectividade.

II. Objetivos, Competências e Habilidades

As atividades propostas por este produto educacional têm por objetivo levar aos alunos a mobilização de conhecimentos, habilidade, atitudes e valores para resolver demandas da vida cotidiana, num contexto interconectado e tecnológico.

Nela trabalharemos em especial cinco das Competências Gerais presentes na BNCC, são elas a 1, 2, 3, 5 e 10, a saber:

1. *Conhecimento*: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre os mundos físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade. Continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. *Pensamento científico, crítico e criativo*: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. *Senso estético e repertório cultural*: Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

5. *Cultura digital*: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

10. *Autonomia*: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Abordaremos, mais especificamente competências e habilidades intrínsecas a Matemática e a Arte:

Na Matemática as Competências:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

E as Habilidades:

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Na Arte as Competências:

1. Explorar, conhecer, fruir e analisar criticamente práticas e produções artísticas e culturais do seu entorno social, dos povos indígenas, das comunidades tradicionais brasileiras e de diversas sociedades, em distintos tempos e espaços, para reconhecer a arte como um fenômeno cultural, histórico, social e sensível a diferentes contextos e dialogar com as diversidades.

2. Compreender as relações entre as linguagens da Arte e suas práticas integradas, inclusive aquelas possibilitadas pelo uso das novas tecnologias de informação e comunicação, pelo cinema e pelo audiovisual, nas condições particulares de produção, na prática de cada linguagem e nas suas articulações.

4. Experimentar a ludicidade, a percepção, a expressividade e a imaginação, ressignificando espaços da escola e de fora dela no âmbito da Arte.

5. Mobilizar recursos tecnológicos como formas de registro, pesquisa e criação artística.

8. Desenvolver a autonomia, a crítica, a autoria e o trabalho coletivo e colaborativo nas artes.

9. Analisar e valorizar o patrimônio artístico nacional e internacional, material e imaterial, com suas histórias e diferentes visões de mundo.

E as Habilidades:

(EF69AR04) Analisar os elementos constitutivos das artes visuais (ponto, linha, forma, direção, cor, tom, escala, dimensão, espaço, movimento etc.) na apreciação de diferentes produções artísticas.

(EF69AR05) Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, performance etc.).

(EF69AR35) Identificar e manipular diferentes tecnologias e recursos digitais para acessar, apreciar, produzir, registrar e compartilhar práticas e repertórios artísticos, de modo reflexivo, ético e responsável.

III. Atividades:

Atividade 1:

Lendo a Matemática no mundo da Arte

Tempo: 100 min

Materiais: Aparelhos celulares e/ou computadores conectados a internet (caso a atividade seja toda feita em sala), acervo de fotos de obras de arte dos diversos períodos históricos, cartolina, canetas hidrográficas, régua e etc.

Indicação de Aplicação: A primeira e a segunda etapa podem ser aplicadas em quaisquer turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto a terceira etapa recomendamos a aplicação ao 9º ano devido a abordagem de conceitos mais abstratos.

1ª Etapa: (20 min) *Introdução e Motivação*

Esta primeira etapa consiste em apresentar aos alunos a ideia de que a matemática não é “um bicho de sete cabeças”, mas que ela é algo mais presente em nossas vidas do que comumente costumamos perceber.

Para facilitar esta percepção recomenda-se o vídeo produzido e disponibilizado no site do *International Mathematical Union*, em comemoração pelo *The International Day of Mathematics* (Dia Internacional da Matemática), disponível em sua página no endereço: <https://player.vimeo.com/video/397014531>

Após a apresentação recomenda-se um diálogo com a turma no qual se questione os alunos: ONDE VOCÊS PERCEBEM A MATEMÁTICA PARA ALÉM DA SALA DE AULA?

A partir de então oriente aos alunos uma pesquisa por obras de arte, as quais serão expostas em sala, nas quais os artistas se valeram de conhecimentos matemáticos na realização de obras.

2ª Etapa: (50 min) *Coleta das pesquisas dos alunos e montagem da mostra das Obras de Arte/Matemática.*

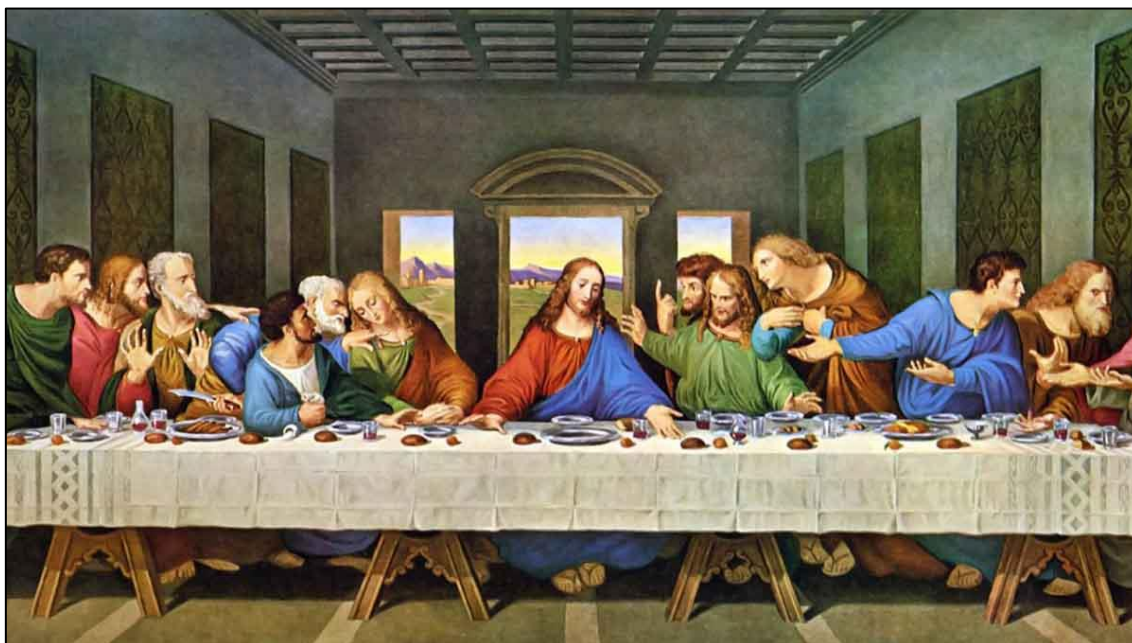
Esta etapa pode ser reservada a pesquisa e montagem dos murais, ou caso a pesquisa seja orientada para ambiente extra classe, este momento será direcionado apenas a montagem dos murais.

Obs.: Recomenda-se aos professores envolvidos que também faça o levantamento de imagens que se enquadrem no tema e abordem os desenhos em perspectivas, para que

na eventualidade, dos alunos não elencarem tais autores e obras, o trabalho possa ser continuado (no [Anexo I](#) podemos visualizar alguns exemplos).

3ª Etapa: (30 min) Hora de criar o link de definições.

Tomando como base uma das obras que abordem o tema da perspectiva o professor deverá apresentar aos alunos e orientar os mesmos na identificação do que é o Ponto de Fuga e a Linha do Horizonte da imagem. Sugerimos “A Última Ceia” de Leonardo da Vinci.



A Última Ceia, de Leonardo da Vinci

Fonte: Isto É. Disponível em: <https://istoe.com.br/wp-content/uploads/2021/05/ceia-2-1280x720-1.jpg?x13129>. Acesso em: 15 fev. 2024

Na Arte o *Ponto de Fuga* é a referência no horizonte para fazer as linhas em um desenho e construir uma perspectiva, na Matemática ele é conhecido como *Centro da Perspectiva*, ponto para o qual as linhas de projeção convergem.

Na Arte *Linha do Horizonte* é o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador, na Matemática ela é conhecida como *Eixo da Perspectiva*.

Para localizar o exposto anteriormente, oriente os alunos, utilizando réguas, a buscar linhas retas na imagem, como juntas do piso, alinhamento das marquises, construções e etc.

Será possível observar que estas linhas irão convergir para um ponto o Ponto de Fuga, por onde passa a Linha do Horizonte, geralmente delimitada pelo sopé das montanhas da imagem, quando visível (esta construção encontra-se no [Anexo II](#))

Para fixar as terminologias do Universo da Arte e da Matemática recomendamos a ilustração a seguir disponível no [Anexo III](#):



Fonte: Adaptação do autor. Disponível em: https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AOn4CLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg.. Acesso em: 15 fev. 2024

Atividade 2

Oficina de Fotografia

Tempo: 100 min

Materiais: Máquina fotográfica, Celulares e/ou Smartphones com câmera, Computadores e/ou Smartphones com acesso à internet (caso as imagens tenham de ser obtidas pela internet), cartolina, canetas hidrográficas, régua e etc.

Indicação de Aplicação: A primeira etapa podem ser aplicadas em quaisquer turmas do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, enquanto a segunda etapa recomendamos a aplicação ao 9º ano devido a abordagem de conceitos mais abstratos.

1ª Etapa: (50 min) *Vamos fotografar?!*

Propor aos alunos fotografar ambientes e/ou paisagens que se caracterizem pela aparição de objetos em perspectivas, Ponto de Fuga e Linha Horizonte. Caso seja inviável a iniciativa anterior, estas imagens também podem ser obtidas na internet. Veja alguns exemplos de click's:



Foto Modelo para Oficina de Fotografia (Ponto de Fuga e Linha do Horizonte)

Km 60 da RJ 162. Macaé-RJ

Fonte: Foto dos autores (2024)



Foto Modelo para Oficina de Fotografia (Objetos em Perspectiva)

Fonte: Foto dos autores (2024)

2ª Etapa: (50 min) Hora da pesquisa

Nesta etapa deve-se orientar aos alunos uma pesquisa sobre Girard Desargues e suas contribuições para a Geometria Projetiva. A ideia é que surja nas pesquisas uma breve biografia deste matemático, juntamente com a historiografia da Geometria Projetiva e consequentemente o Teorema de Desargues, dados estes que poderão, e recomendamos, ser explicitados no mural da exposição.

Atividade 3

O teorema de Desargues e a Tecnologia

Tempo: 100 min

Materiais: Computador e/ou Smartphone com acesso à internet ou com o Software Geogebra (Geometria) (Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>) previamente instalado e fichas com os guias de construção ([Anexo IV](#))

Como opção a inexistência de recursos tecnológicos as construções podem ser realizadas com régua e esquadro (as fichas com o guia de construção encontram-se no [Anexo V](#))

Indicação de Aplicação: Recomendamos a familiarização prévia com o Software Geogebra, e a aplicação desta atividade ao 9º ano do Ensino Fundamental.

1ª Etapa: (80 min) *Desenhando o Teorema*

Nesta etapa será proposto aos alunos a utilização do Geogebra (ou régua e esquadro) para construir triângulos em perspectiva e a partir deles a visualização do Teorema de Desargues.

Divida a turma em 4 grupos, cada um será responsável por construir o caso base do teorema ou um de seus casos degenerados.

Cada grupo deverá receber uma das fichas com o guia de construção apresentados nas páginas a seguir e no ([Anexo IV](#)):

G1 – Caso Base

Frente

G1 – CASO BASE

I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta  no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Verso

Objetivo A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta  clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

VI. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto.

VII. Para marcar ele vamos usar a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra  para exibir todos as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta  e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto M.

XII. Escolha por fim a ferramenta  , clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L, e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – Caso em que as retas que determinam os vértices dos triângulos são paralelas.

Frente

G2 – RETAS PARALELAS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar três retas paralelas, a partir delas que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta  no menu lateral e dê um clique na janela do App, será criado o ponto A, em seguida clique em um outro ponto na janela, será marcado o ponto B e criada a reta que passa pelos pontos A e B.

III. Agora vamos utilizar a ferramenta "Reta Paralela", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra  para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre a reta já criada e clique em um outro ponto na janela. Este ponto será demarcado como ponto C e você terá criado uma reta paralela a reta que passa pelos pontos A e B e que passa pelo ponto C.

Repita este procedimento para criar outra reta paralela a estas. O novo ponto será demarcado como ponto D e você terá criado uma reta paralela as retas anteriores e que passa pelo D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

V. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelo C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Verso

Objetivo A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção, para isso escolha a ferramenta  clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

VI. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos E e F, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

VII. Escolha a ferramenta  clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

VIII. Escolha novamente a ferramenta  e clique sobre os pontos F e G, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto L.

X. Escolha novamente a ferramenta  e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H.

XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto M.

XII. Escolha por fim a ferramenta  , clique sobre os pontos K e M.

A reta gerada que passa pelos pontos K, L, e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, digamos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – Caso em que um dos lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Frente

G3 – UM DOS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

V. Escolha agora a ferramenta e clique sobre os pontos E e F, e em seguida escolha a ferramenta e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H.

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H.

VI. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VII. Selecione a ferramenta e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e C e depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Verso

Vamos criar agora o segundo triângulo.

VIII. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre o ponto H, um clique sobre o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Observe A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção.

para isso escolha a ferramenta e clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

IX. Escolha agora a ferramenta e clique sobre os pontos J e I, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J.

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I, J ou K, de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

X. Selecione a ferramenta e clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto K.

Agora vamos repetir os procedimentos IX e X para os outros lados dos triângulos.

XI. Escolha agora a ferramenta e clique sobre os pontos G e E, e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos E e G.

XII. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta e clique sobre as duas retas geradas, o ponto de interseção será o ponto L.

XIII. Escolha por fim a ferramenta, clique sobre os pontos K e L.

A reta gerada que passa pelos pontos K e L, é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto "M" uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos, quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – Caso em que os três lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Frente

G4 – TRÊS LADOS PARALELOS

I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

II. Escolha a ferramenta no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Você acabou de criar o ponto A.

III. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

IV. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

V. Escolha agora a ferramenta e clique sobre os pontos E e F.

VI. Selecione a ferramenta e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H.

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H.

VII. Para esta criação vamos usar a ferramenta "Retas Paralelas", para encontrá-la no menu lateral clique na palavra para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

VIII. Selecione a ferramenta e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e C e depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Verso

Observe A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção.

para isso escolha a ferramenta e clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

Agora vamos construir uma reta paralela ao segmento determinado pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H.

IX. Selecione a ferramenta e clique sobre o segmento determinado pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

X. Selecione a ferramenta e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e D e depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto J.

Para finalizar a construção, vamos construir a última paralela, mesmo não sendo esta necessária para concluir o procedimento.

XI. Selecione a ferramenta e clique sobre o segmento determinado pelos pontos G e F e em seguida sobre o ponto J.

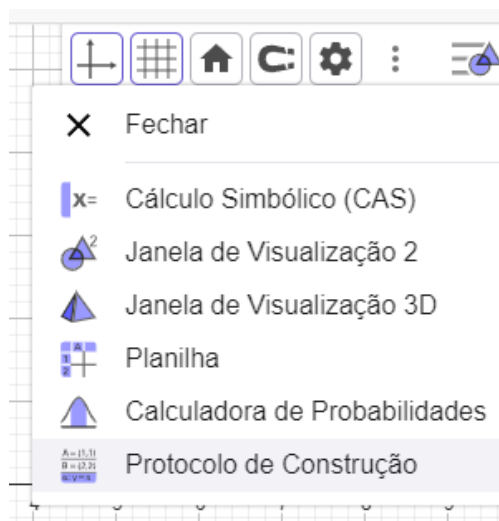
Note que já é possível visualizar o segundo polígono, agora vamos explicitá-lo.

XII. Escolha agora a ferramenta e dê um clique sobre o ponto J, um clique sobre o ponto I, um clique sobre o ponto J, um clique sobre o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Note que não é possível determinar de interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos, quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

Logo não é possível determinar o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Obs.: Caso seja observada alguma dificuldade na construção dos casos, é possível visualizá-las no Geogebra Clássico (Online). Utilize o títulos a seguir para acessar cada caso e acompanhe o passo-a-passo pela ferramenta “Protocolo de Construção”, como pode ser visualizado na imagem a ser.



Localização da ferramenta Protocolo de Construção no Geogebra Clássico

Fonte: <https://www.geogebra.org/classic>. Acessado em: 20 fev. 2024

G1 – Caso Base

Acesse em: <https://www.geogebra.org/classic/gxejaszd>

G2 – Caso em que as retas que determinam os vértices dos triângulos são

Acesse em: <https://www.geogebra.org/classic/nxfyetz>

G3 – Caso em que um dos lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Acesse em: <https://www.geogebra.org/classic/dkbctxcx>

G4 – Caso em que os três lados dos triângulos em perspectivas são paralelos entre si.

Acesse em: <https://www.geogebra.org/classic/wbe2wajm>

As imagens das construções com réguas esquadro se encontram no [Anexo VI](#)

2ª Etapa: (20 min) Hora de testar novas possibilidades e expor os trabalhos

Ao término da construção oriente aos grupos mover alguns pontos da construção e visualizar que as Leis do Teorema se mantêm. Se for possível efetue a impressão das construções dos grupos e acrescente nos murais das Atividades 1 e 2.

Atividade 4

Construindo a perspectiva a partir de um ponto

Tempo: 50 min

Materiais: Folha branca (A3 ou A4), Barbante, Fita adesiva (crepe), lápis e borracha

Indicação de Aplicação: Recomendamos a aplicação desta atividade as turmas do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.

1ª Etapa: (05 min) *Introdução e motivação*

Esta atividade consiste em uma oficina de desenho motivada por construções em perspectiva a partir de um ponto. Para motivar e orientar a atividade, sugerimos apresentar o vídeo “Desenho Perspectiva com Barbante” disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Ci_VwrrIpLw, além de algumas das construções a seguir, que estão disponíveis nos anexos ([Anexo VII](#)), como exemplos.



Print's do vídeo “Como nunca mais erras na perperspectivas”, da Academia Brasileira de Artes

Disponível em: <https://www.facebook.com/abra.arte/videos/como-nunca-mais-errar-nas-perspectivas/613863196246409/>. Acessado em 15 fev. 2024

2ª Etapa: (45 min) *Desenho em Perspectiva*

Distribua uma folha de papel em branco A3 ou A4 (o tamanho da folha influenciará apenas no tamanho final do desenho, mas não em sua construção), um pedaço de barbante de aproximadamente 70 cm e um pedaço de Fita Crepe.

O aluno poderá optar por fazer seu desenho com a folha na horizontal ou na vertical sem nenhum prejuízo para a atividade.

Escolhida a posição, oriente os alunos a sinalizarem com um ponto onde eles desejam que seja o Ponto de Fuga de seu desenho e uma linha para ser a Linha do Horizonte. Estas escolhas influenciarão a construção do desenho.



Materiais para desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)

Agora os alunos deverão fixar uma extremidade do barbante exatamente sobre este pontinho utilizando a fita crepe.



Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)



Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)



Passo a passo do desenho em perspectiva a partir de um ponto.

Fonte: Foto dos autores (2024)

Feita a fixação os alunos podem iniciar o desenho utilizando-se do barbante pra traçar as linhas que determinarão a perspectiva do desenho.

Ao termino da atividade, recomendamos expor os trabalhos nos murais juntamente com as atividades 1, 2 e 3.

IV. Referências:

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 2/2017. Ministério da Educação, 2017.

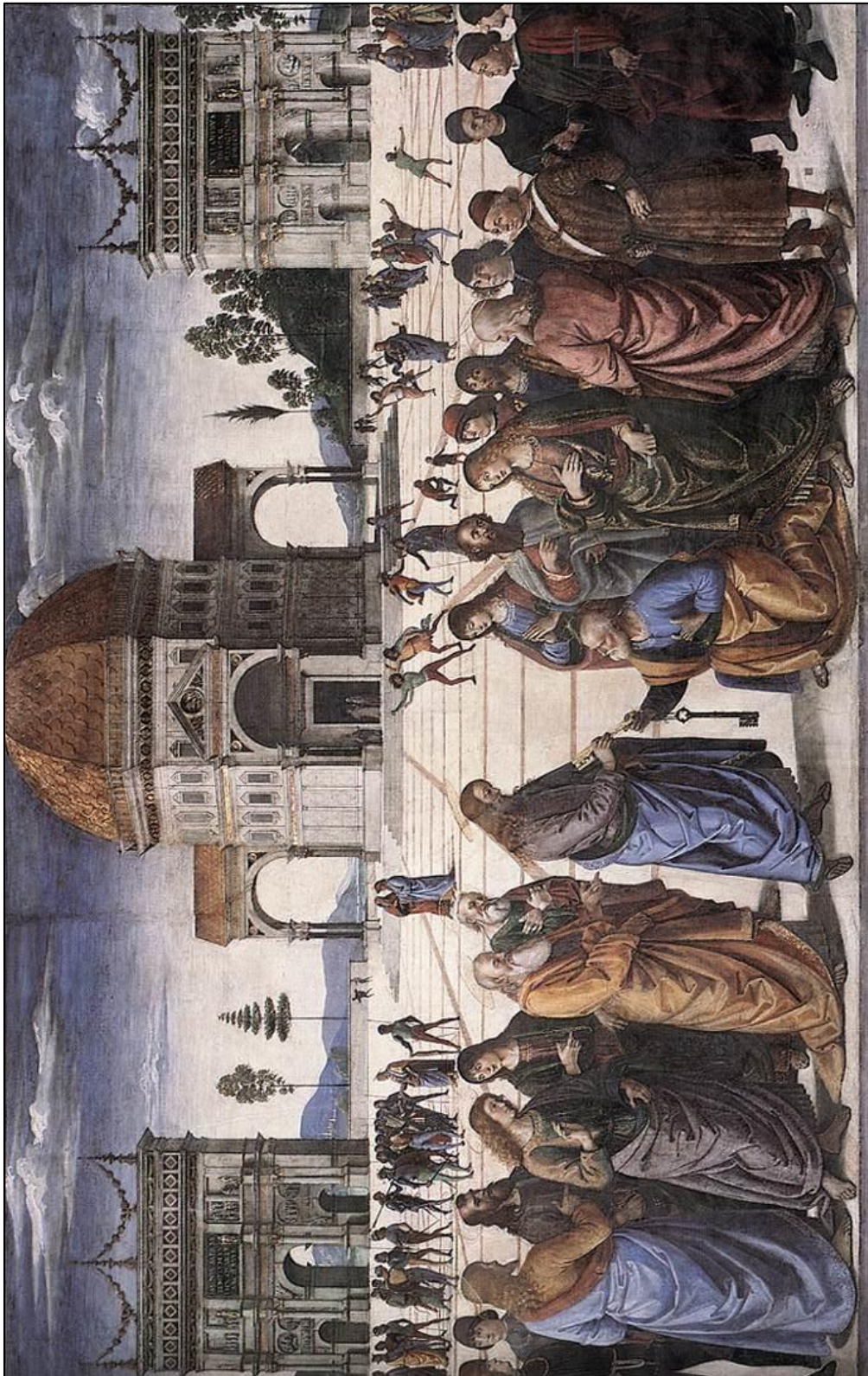
BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). .Resolução CNE/CP nº 4/2018. Ministério da Educação, 2018.

COSTA, F. A. Uma Visão Interdisciplinar do Teorema de Desargues. Rio de Janeiro. 2024. 95p. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

International Mathematical Union. The International Day of Mathematics. 2020. Disponível em: <https://www.idm314.org/math-everywhere-video>. Acesso em 21 fev. 2024.

ANEXOS

Anexo I



Delivery of the Keys, de Pietro Perugino

Fonte: Wikimedia Commons. Disponível em:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/0/0b/20130312164026%21Perugino_Keys.jpg.

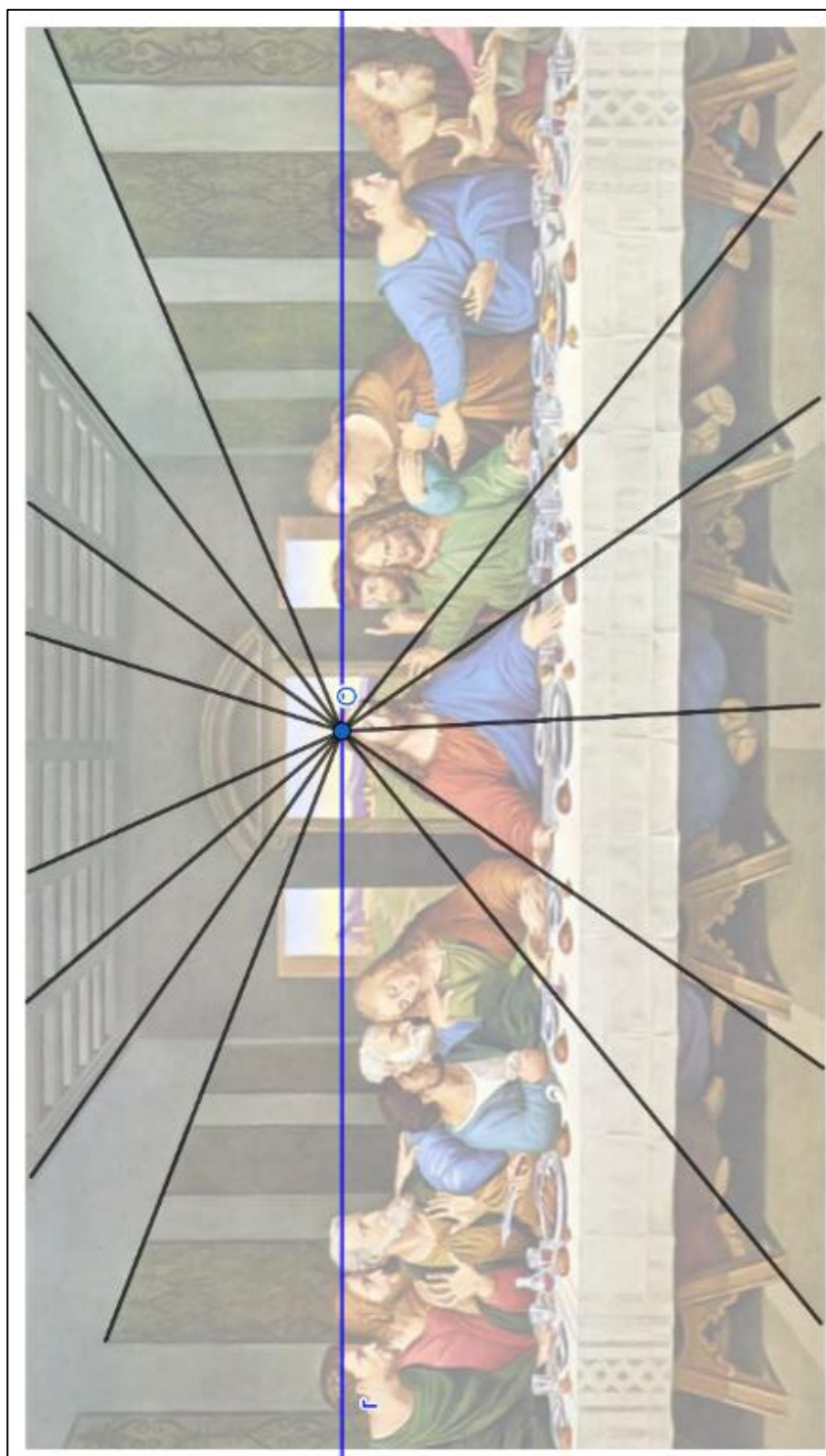
Acesso em: 31 jan. 2024



A Última Ceia, de Leonardo da Vinci

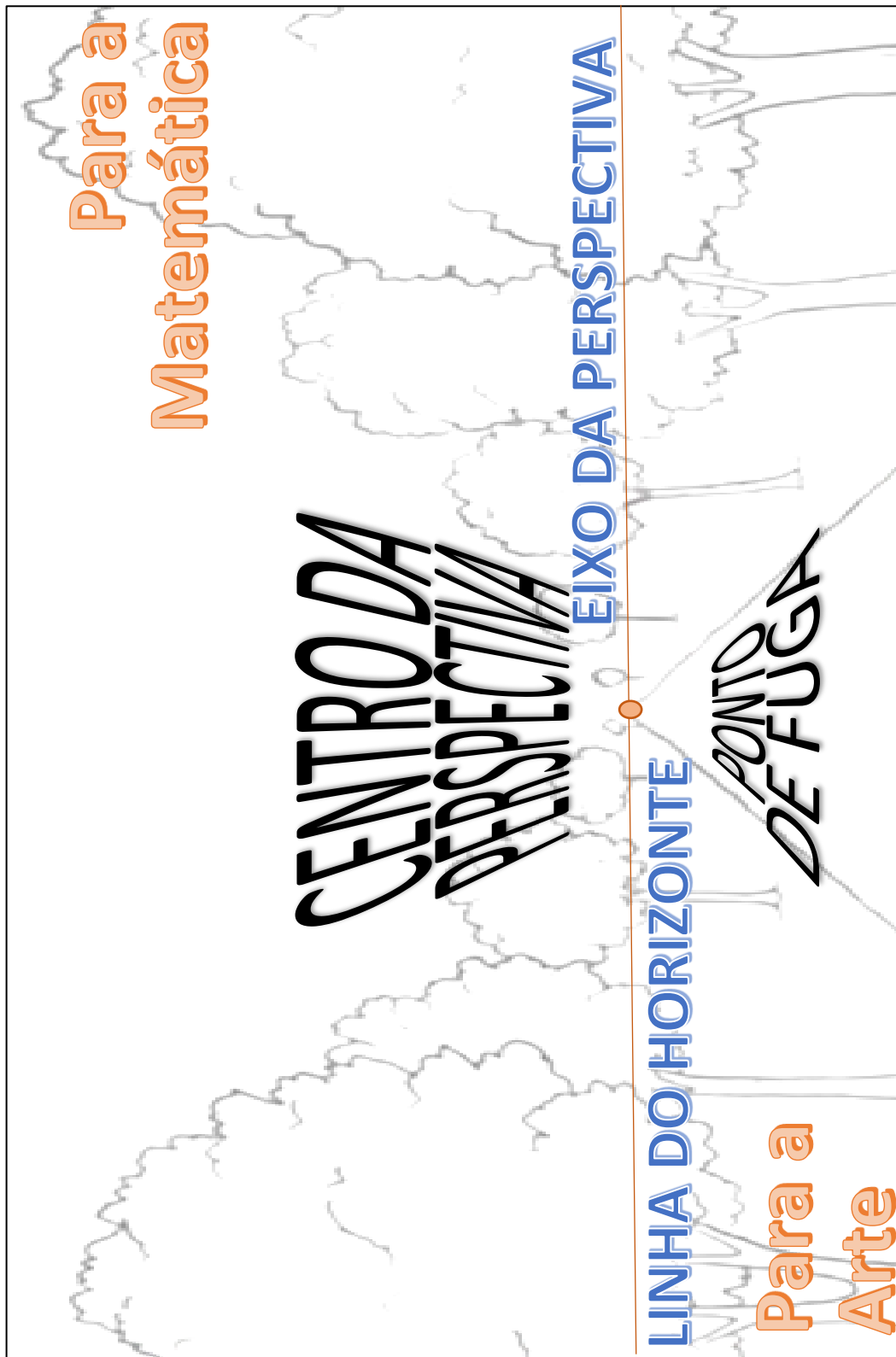
Fonte: Isto É. Disponível em: <https://istoe.com.br/wp-content/uploads/2021/05/ceia-2-1280x720-1.jpg?x13129>. Acesso em: 15 fev. 2024

Anexo II



Quadro A Última Ceia, de Leonardo da Vinci.

Fonte: Adaptação do autor



Fonte: Adaptação do autor. Disponível em: [https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-](https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AO4nCLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg)

[Y2k8/hq720.jpg?sqp=-](https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AO4nCLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg)

[oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AO4nCLC0xA0cvR_Bno](https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AO4nCLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg)

[-P9LaDpG71gnQ8gg](https://i.ytimg.com/vi/SUroyN-Y2k8/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AO4nCLC0xA0cvR_Bno-P9LaDpG71gnQ8gg) Acesso em: 15 fev. 2024

Guias de Construção para o Geogebra

G1 – CASO BASE

- I. Inicie o App Geogebra(Geometria)



Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- II. Escolha a ferramenta  no menu lateral e dê um clique na janela do App.

Ponto

Você acabou de criar o ponto A.

- III. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Reta

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

- IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi

Polígono

determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

- V. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi

Polígono

determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto H, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto I, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto J, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H.

Obs.: A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção,

para isso escolha a ferramenta ,  clique e arraste sua construção, caso necessário.

Mover

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

- VI. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos E e F , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I .

Reta

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto.

- VII. Para marcar ele vamos usar a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, para encontra-la no menu lateral clique na palavra **MAIS** para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K .

Interseção de
Dois Objetos

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

- VIII. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos F e G , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J .

Reta

- IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L .

Interseção de
Dois Objetos

- X. Escolha novamente a ferramenta  e clique sobre os pontos G e E , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta , clique sobre os pontos J e H .

Reta

- XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta  . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M .

Interseção de
Dois Objetos

- XII. Escolha por fim a ferramenta  , clique sobre os pontos K e M .

Reta

A reta gerada que passa pelos pontos K , L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – RETAS PARALELAS

- I. Inicie o App Geogebra(Geometria)



Para começar a construção vamos criar três retas paralelas, a partir delas que faremos toda a construção.

- II. Escolha a ferramenta  no menu lateral e dê um clique na janela do App, será criado o ponto *A*, em seguida clique em um outro ponto na janela, será marcado o ponto *B* e criada a retas que passa pelos pontos *A* e *B*.

- III. Agora vamos utilizar a ferramenta “Reta Paralela”, para encontrá-la no menu lateral clique na palavra **MAIS** para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre a reta já criada e clique em um outro ponto na janela. Este ponto será demarcado como ponto *C* e você terá criado uma reta paralela a reta que passa pelos pontos *A* e *B* e que passa pelo ponto *C*.

*Repita este procedimento para criar outra reta paralela a estas. O novo ponto será demarcado como ponto *D* e você terá criado uma reta paralela as retas anteriores e que passa pelo *D*.*

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

- IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos *A* e *B*, onde você criará o ponto *E*, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto *C*, onde você criará o ponto *F*, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto *D*, onde você criará o ponto *G*, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto *E*.

Para a construção do segundo triângulo, procederemos de maneira similar a etapa IV, porém clicando em pontos diferentes sobre as retas.

- V. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos *A* e *B*, onde você criará o ponto *H*, um clique sobre a reta que foi determinada pelo *C*, onde você criará o ponto *I*, um clique sobre a reta que foi determinada pelo ponto *D*, onde você criará o ponto *J*, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto *H*.

Obs.: A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção,

para isso escolha a ferramenta  Mover clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

- VI. Escolha agora a ferramenta  Reta e clique sobre os pontos E e F , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos H e I .

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I , J ou K , de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

- VII. Escolha a ferramenta  Interseção de Dois Objetos clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K .

Agora vamos repetir os procedimentos VI e VII para os outros lados dos triângulos.

- VIII. Escolha novamente a ferramenta  Reta e clique sobre os pontos F e G , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J .

- IX. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta  Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L .

- X. Escolha novamente a ferramenta  Reta e clique sobre os pontos G e E , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H .

- XI. Para marcar o ponto de interseção vamos usaremos novamente a ferramenta  Interseção de Dois Objetos . Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto M .

- XII. Escolha por fim a ferramenta  Reta, clique sobre os pontos K e M .

A reta gerada que passa pelos pontos K , L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, dizemos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – UM DOS LADOS PARALELOS



- I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- II. Escolha a ferramenta no  menu lateral e dê um clique na janela do App.

Ponto

Você acabou de criar o ponto A.

- III. Escolha agora a ferramenta dê  um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Reta

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

- IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Poligono

- V. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos E e F, e em seguida escolha a ferramenta  e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Ponto

Reta

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

- VI. Para esta criação vamos usar a ferramenta “Retas Paralelas”, para encontrá-la no menu lateral clique na palavra **MAIS** para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

Reta Paralela

- VII. Selecione a ferramenta  e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e C e depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

Interseção de
Dois Objetos

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Vamos criar agora o segundo triângulo.

VIII. Escolha agora a ferramenta



Polígono

dê um clique sobre o ponto H , um clique sobre o ponto I ,

um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D , onde você criará o ponto J , para finalizar a construção clique sobre o ponto H .

Obs.: A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção,

para isso escolha a ferramenta



Mover

clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

IX. Escolha agora a ferramenta



Reta

e clique sobre os pontos F e G , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos I e J .

Note que as retas construídas se tocam em um determinado ponto. Para isso pode ser necessário que arraste I , J ou K , de tal maneira que o ponto K fique visível na janela de visualização.

X. Selecione a ferramenta



Interseção de
Dois Objetos

clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto K .

Agora vamos repetir os procedimentos IX e X para os outros lados dos triângulos.

XI. Escolha agora a ferramenta



Reta

e clique sobre os pontos G e E , e em seguida, ainda de posse da mesma ferramenta, clique sobre os pontos J e H .

XII. Para marcar o ponto de interseção vamos usar a ferramenta



Interseção de
Dois Objetos

. Clique sobre as duas retas geradas, o ponto de intersecção será o ponto L .

XIII. Escolha por fim a ferramenta



Reta

, clique sobre os pontos K e L .

A reta gerada que passa pelos pontos K e L é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto “M” uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos, quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – TRÊS LADOS PARALELOS



- I. Inicie o App Geogebra(Geometria)

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- II. Escolha a ferramenta no  menu lateral e dê um clique na janela do App.

Ponto

Você acabou de criar o ponto A.

- III. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre o ponto A e outro clique em um outro local da janela do App.

Reta

Você acabou de criar a reta que passa pelos pontos A e B.

Repita este procedimento para criar a reta que passa pelos pontos A e C, e a reta que passa pelos pontos A e D.

Agora Iniciaremos a construção do primeiro triângulo.

- IV. Escolha agora a ferramenta  dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B, onde você criará o ponto E, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e C, onde você criará o ponto F, um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e D, onde você criará o ponto G, para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto E.

Poligono

- V. Escolha agora a ferramenta  e clique sobre os pontos E e F.

Reta

- VI. Selecione a ferramenta  e dê um clique sobre a reta que foi determinada pelos pontos A e B. O ponto determinado por este procedimento será o ponto H

Ponto

Agora vamos construir uma reta paralela a reta que passa pelos pontos E e F e que passa pelo ponto H

- VII. Para esta criação vamos usar a ferramenta “Retas Paralelas”, para encontrá-la no menu lateral clique na palavra **MAIS** para exibir todas as ferramentas. De posse da ferramenta  clique sobre a reta que passa pelos pontos E e F e em seguida sobre o ponto H.

Reta Paralela

- VIII. Selecione a ferramenta  e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e C e depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto H e é paralela a reta que passa pelos pontos E e F. Este ponto será denominado como ponto I.

Interseção de
Dois Objetos

O segmento HI e o segmento EF são paralelos.

Obs.: A qualquer momento você poderá alterar o zoom, ou ajustar sua construção,

para isso escolha a ferramenta



clique e arraste sua construção, caso necessário.

Para alterar o zoom, role o scroll do mouse quando estiver usando o computador ou utilize o movimento de pinça caso esteja usando o Smartphone.

Agora vamos construir uma reta paralela ao segmento determinado pelos pontos F e G e que passa pelo ponto I

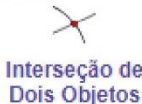
IX. Selecione a ferramenta



clique sobre o segmento determinado pelos pontos F e G

e em seguida sobre o ponto I .

X. Selecione a ferramenta



e depois clique sobre a reta que contém os pontos A e D e

depois sobre a última reta criada, a que contém o ponto I e é paralela a reta que passa pelos pontos F e G . Este ponto será denominado como ponto J .

Para formalizar a construção, vamos construir a última paralela, mesmo não sendo esta necessária para concluir o procedimento.

XI. Selecione a ferramenta



clique sobre o segmento determinado pelos pontos G e E

e em seguida sobre o ponto J .

Note que já é possível visualizar o segundo polígono, agora vamos explicitá-lo

XII. Escolha agora a ferramenta



dê um clique sobre o ponto H , um clique sobre o ponto

I , um clique sobre o ponto J , para finalizar a construção do triângulo clique sobre o ponto H .

Note que não é possível determinar a interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos, quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

Logo não é possível determinar o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Guias de Construção para Régua Esquadro

G1 – CASO BASE

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A .
- II. Marque outros três pontos distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B , C e D .
- III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B , C e D .

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

- IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto E .
- V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto F .
- VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto G .
- VII. Interligue os pontos E , F e G formando um triângulo.

Vamos criar agora um segundo triângulo seguindo as diretrizes anteriores, marcando pontos distintos dos anteriores.

- VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto H .
- IX. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto I .
- X. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto J .
- XI. Interligue os pontos H , I e J formando um triângulo.
- XII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos EF e HI , e na interseção destas marque o ponto K .
- XIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ , e na interseção destas marque o ponto L .
- XIV. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH , e na interseção destas marque o ponto M .
- XV. Trace a reta que interliga os pontos K , L e M .

A reta gerada no item anterior, que passa pelos pontos K , L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

G2 – RETAS PARALELAS

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar três retas paralelas sobre, a partir delas que faremos toda a construção.

- I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A .
- II. Em seguida marque um outro ponto, distinto de A , ao qual o chamaremos de B .
- III. Trace a reta determinada pelos ponto A e B .
- IV. Marque agora um ponto C , fora da reta desenhada anteriormente.
- V. Trace a reta paralela ao seguimento AB e que passa por C .
- VI. Marque um ponto D fora das retas anteriores.
- VII. Trace a reta paralela ao seguimento AB e que passa por D .

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

- VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto E .
- IX. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto F .
- X. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto G .
- XI. Interligue os pontos E , F e G formando um triângulo.

Vamos criar agora um segundo triângulo seguindo as mesmas diretrizes e marcando pontos distintos dos já marcados

- XII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto H .
- XIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto I .
- XIV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto J .
- XV. Interligue os pontos H , I e J formando um triângulo.
- XVI. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos EF e HI , e na interseção destas marque o ponto K .
- XVII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ , e na interseção destas marque o ponto L .
- XVIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH , e na interseção destas marque o ponto M .
- XIX. Trace a reta que interliga os pontos K , L e M .

A reta gerada que passa pelos pontos K , L e M é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Observe que neste caso está visível na construção o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), quando isto acontece, dizemos que este ponto encontra-se no Infinito.

G3 – UM DOS LADOS PARALELO

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A .
- II. Marque outros três pontos distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B , C e D .
- III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B , C e D .

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

- IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto E .
- V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto F .
- VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto G .
- VII. Interligue os pontos E , F e G formando um triângulo.

Agora realizaremos a construção de um segundo triângulo:

- VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto H , diferente de E .
- IX. Trace a reta que é paralela ao segmento EF e passa pelo ponto H .
- X. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e C , marque o ponto I .
- XI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto J , diferente de G .
- XII. Interligue os pontos H , I e J formando um triângulo.
- XIII. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos FG e IJ , e na interseção destas marque o ponto K .
- XIV. Prolongue as retas determinadas pelos segmentos GE e JH , e na interseção destas marque o ponto L .
- XV. Trace a reta que interliga os pontos K e L .

A reta gerada que passa pelos pontos K e L é a reta que determina o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Note que não é possível determinar um terceiro ponto "M" uma vez que os segmentos HI e EF são paralelos, quando isto acontece dizemos que o ponto M está no infinito.

G4 – TRÊS LADOS PARALELOS

* Construção com Régua

Para começar a construção vamos criar o ponto que será o Centro da Perspectiva (Ponto de Fuga), a partir dele que faremos toda a construção.

- I. Marque sobre a folha um ponto ao qual chamaremos de A .
- II. Marque outros três pontos distintos de A e entre si, aos quais chamaremos de B , C e D .
- III. Trace três retas, cada uma delas com origem no ponto A e que passem por cada um dos pontos B , C e D .

Sobre cada uma das retas marque um ponto:

- IV. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto E .
- V. Sobre a reta determinada pelos pontos A e C , marque o ponto F .
- VI. Sobre a reta determinada pelos pontos A e D , marque o ponto G .
- VII. Interligue os pontos E , F e G formando um triângulo.

Agora realizaremos a construção de um segundo triângulo:

- VIII. Sobre a reta determinada pelos pontos A e B , marque o ponto H , diferente de E .
- IX. Trace a reta que é paralela ao segmento EF e passa pelo ponto H .
- X. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e C , marque o ponto I .
- XI. Trace a reta que é paralela ao segmento FG e passa pelo ponto I .
- XII. Na interseção desta reta com a reta descrita pelos pontos A e D , marque o ponto J .
- XIII. Interligue os pontos H , I e J formando um triângulo.

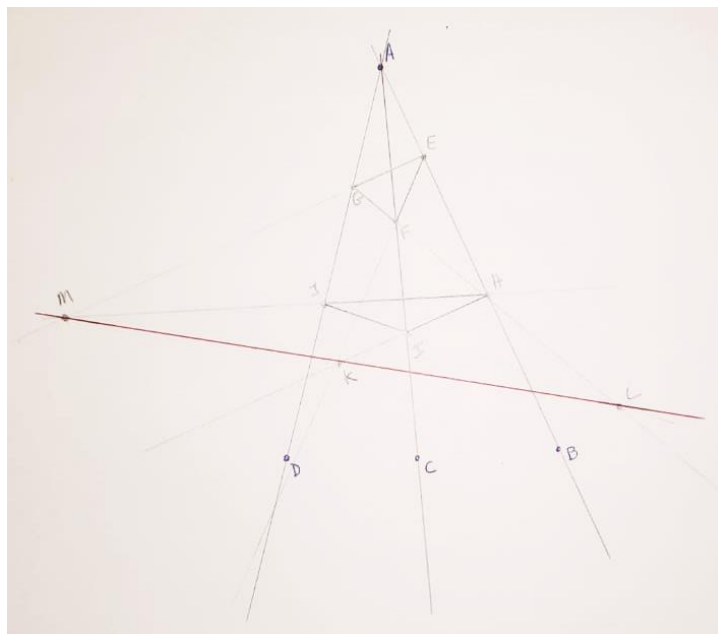
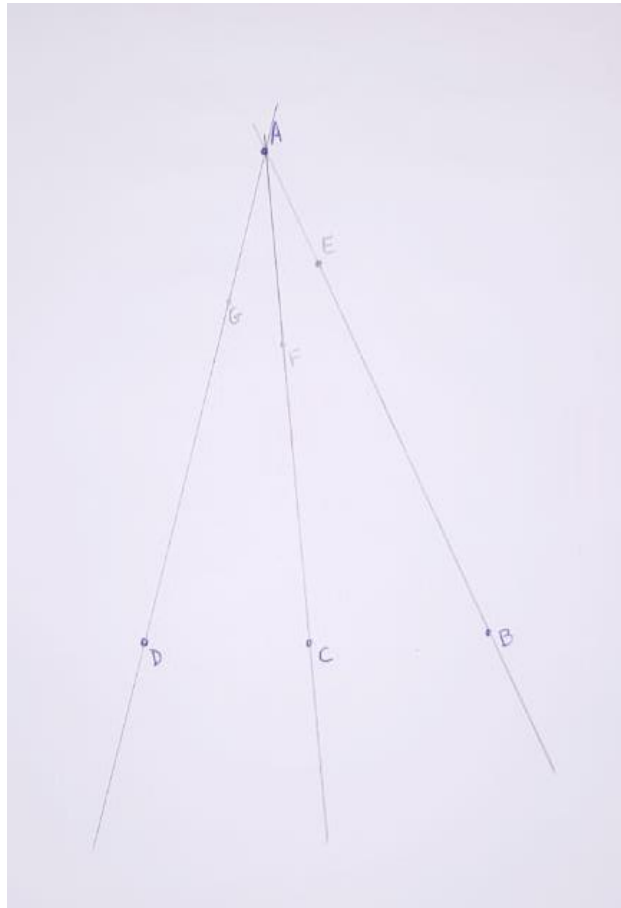
Note que não é possível determinar de interseção dos lados dos triângulos, visto que eles são paralelos, quando isto acontece dizemos que estes pontos estão no infinito.

Logo não é possível determinar o Eixo da Perspectiva (Linha do Horizonte).

Anexo VI

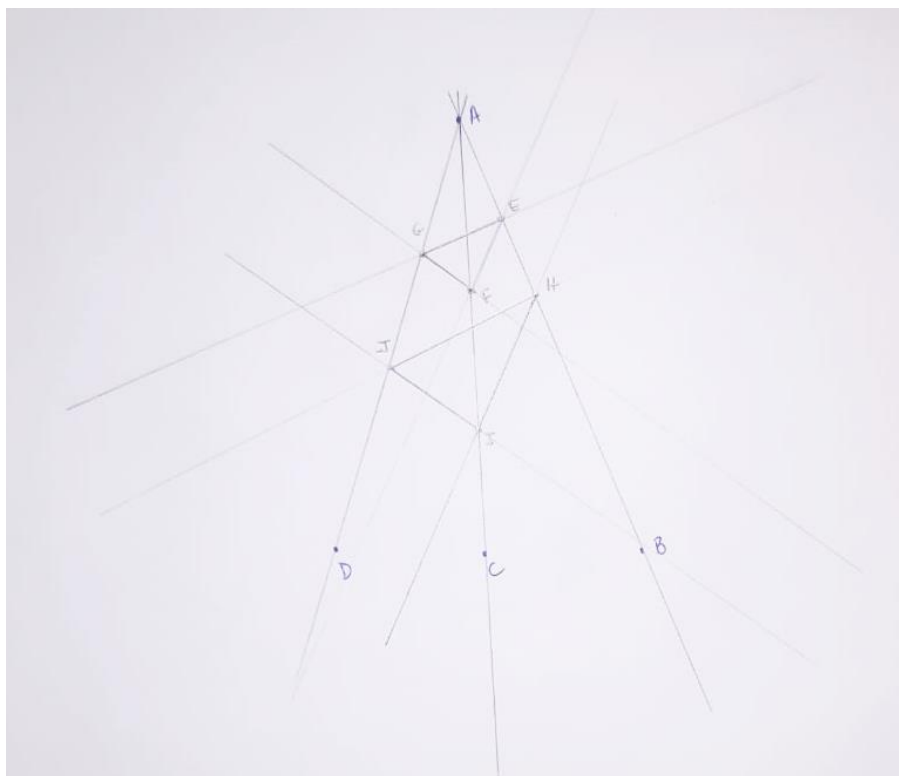
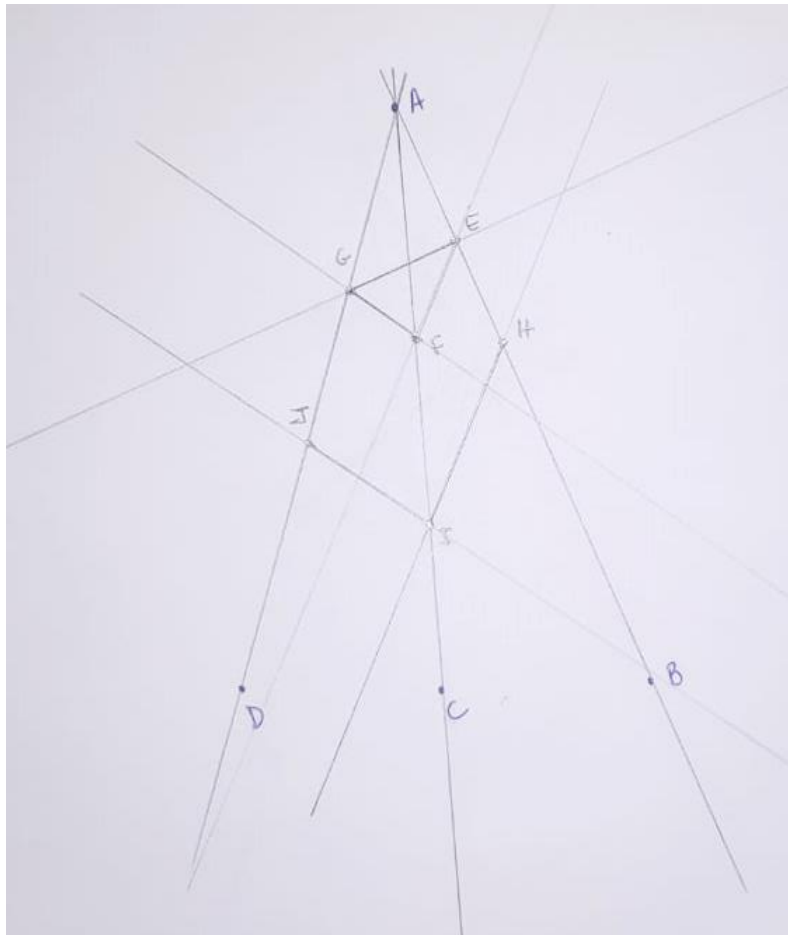
Fotos com exemplos das Construção com Régua Esquadro

G1 – Caso Base



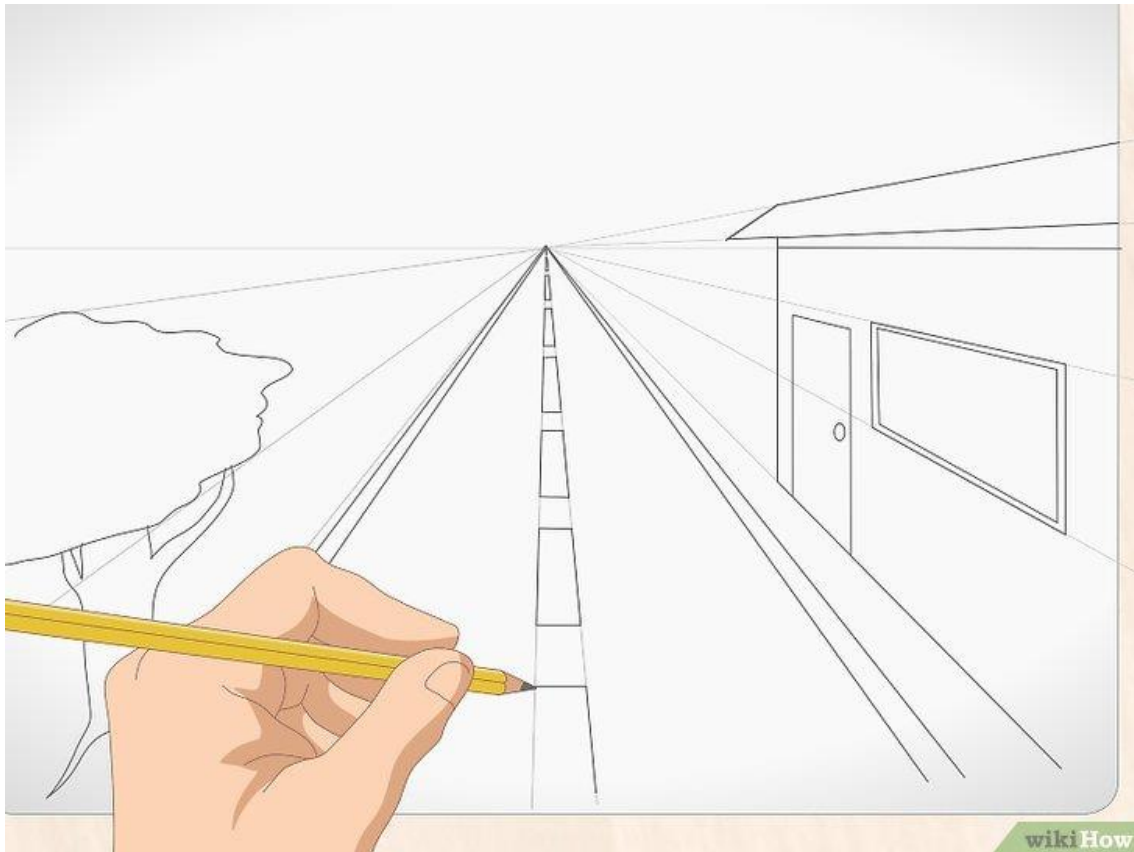
G3 – Um dos Lados Paralelo

G4 – Três lados Paralelos



Anexo VII

Exemplos de desenhos em perspectiva



Disponível em: <https://pt.wikihow.com/Desenhar-em-Perspectiva#/Imagem:Draw-Perspective-Step-5-Version-3.jpg>. Acessado em: 15 fev. 2024



Disponível em: <https://construcaoedesign.com/wp-content/uploads/2010/01/perspectiva-aprender-a-desenhar-a-mao-livre.webp>. Acessado em: 15 fev. 2024