

PUC-Rio
Desafio em Matemática
11 de outubro de 2014

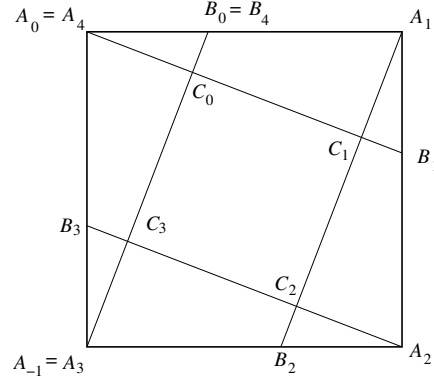
Nome: **GABARITO** _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)** Seja $A_0A_1A_2A_3$ um quadrado de lado 1. Convencionamos que $A_4 = A_0$ e $A_{-1} = A_3$. Marcamos um ponto B_k sobre cada lado A_kA_{k+1} de tal forma que os comprimentos dos quatro segmentos A_kB_k sejam todos iguais. Seja C_k o ponto de interseção entre os segmentos A_kB_{k+1} e $A_{k-1}B_k$.



Sabendo que a área do quadrado $C_0C_1C_2C_3$ é igual a $\frac{1}{3}$, determine o comprimento do segmento A_0B_0 .

Solução:

Seja s o comprimento de A_kB_k : nosso objetivo é encontrar o valor de s . Vamos determinar as dimensões da figura em função de s .

Por Pitágoras em $A_kA_{k+1}B_{k+1}$, temos que A_kB_{k+1} mede $\sqrt{1+s^2}$. Por semelhança entre $A_kA_{k+1}B_{k+1}$ e $A_kC_{k+1}A_{k+1}$ temos que A_kC_{k+1} mede $1/\sqrt{1+s^2}$ e que $A_{k+1}C_{k+1}$ mede $s/\sqrt{1+s^2}$. Por Pitágoras (ou por semelhança) temos que $B_{k+1}C_{k+1}$ mede $s^2/\sqrt{1+s^2}$. Assim C_kC_{k+1} mede

$$\sqrt{1+s^2} - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1-s}{\sqrt{1+s^2}}. \quad (1)$$

A área do quadrado $C_0C_1C_2C_3$ é portanto igual a

$$\frac{1-2s+s^2}{1+s^2} = \frac{1}{3}$$

donde $3-6s+3s^2 = 1+s^2$ ou equivalentemente $s^2-3s+1=0$. Esta equação tem duas raízes reais:

$$s_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6; \quad s_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,4.$$

Pela equação 1, apenas a segunda é consistente com o problema; temos portanto

$$s = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,4.$$

2. (1,5 ponto) Seja

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Quantas soluções reais distintas tem a equação abaixo?

$$f(f(f(f(x)))) = -f(f(x))$$

Primeira solução:

A função f tem polos em ± 1 logo tem como domínio natural a união de três intervalos disjuntos: $(-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty)$. Em cada um destes três intervalos a função é monótona estritamente decrescente (pois tanto $x \mapsto 1/(x-1)$ quanto $x \mapsto 1/(x+1)$ o são) logo as restrições de f a cada um dos intervalos são bijeções com $(-\infty, 0)$, $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$, respectivamente.

As soluções de $f(z) = \pm 1$ são quatro:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 - \sqrt{2} \approx -2,4, & z_2 &= +1 - \sqrt{2} \approx -0,4, \\ z_3 &= -1 + \sqrt{2} \approx +0,4, & z_4 &= +1 + \sqrt{2} \approx +2,4. \end{aligned}$$

Assim a função $g = f \circ f$ tem os quatro polos acima e seu domínio natural é a união de cinco intervalos disjuntos:

$$(-\infty, z_1) \cup (z_1, z_2) \cup (z_2, z_3) \cup (z_3, z_4) \cup (z_4, +\infty).$$

Note que aqui incluímos -1 e $+1$ no domínio de g , o que pode ser considerado um abuso pois f não está definida nestes pontos. Em cada um dos cinco intervalos acima a função g é monótona estritamente crescente logo as restrições de g a cada um dos intervalos são bijeções com $(0, +\infty)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ e $(-\infty, 0)$, respectivamente.

Assim a equação $g(u) = -u$ tem cinco soluções reais (veja a Figura 1).

Além disso, elas podem ser calculadas pela fórmula de g e estão uma em cada intervalo. Sejam

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \approx -3,08, & u_2 &= -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approx -0,73, \\ u_3 &= 0, & u_4 &= -u_2, & u_5 &= -u_1 \end{aligned}$$

estas soluções.

A equação do enunciado é equivalente a $g(g(x)) = -g(x)$. Logo suas soluções são as imagens inversas de u_k por g . Cada um dentre u_1, u_2, u_4 e u_5 tem quatro imagens inversas. Já u_3 tem três: 0 e ± 1 , sendo estas últimas duas de certa forma ilegais. Assim a equação tem 17 raízes reais legítimas, além de duas ($x = \pm 1$) ilegais (ou pelo menos de legalidade duvidosa).

Observação: Se considerarmos $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ com $f(-1) = f(1) = \infty$ e $f(\infty) = 0$, as duas soluções $x = \pm 1$ passam a fazer sentido e ainda ganhamos mais uma solução (a vigésima!): $x = \infty$.

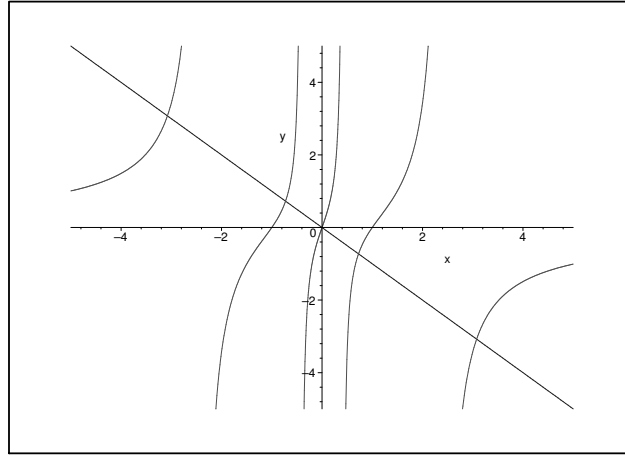


Figura 1: Os gráficos de $v = g(u)$ e de $v = -u$.

Segunda solução:

Seja $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos de módulo 1. Defina $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ por

$$h(z) = \frac{-iz + i}{z + 1}; \quad h^{-1}(x) = \frac{ix + 1}{-ix + 1}.$$

Definimos $\tilde{f}(z) = (h^{-1} \circ f \circ h)(z) = z^{-2}$. Substituindo x por z , a equação do enunciado torna-se $\tilde{f}(\tilde{f}(\tilde{f}(\tilde{f}(z)))) = (\tilde{f}(\tilde{f}(z)))^{-1}$ ou $z^{16} = z^{-4}$ que tem 20 soluções: ζ^k , $k = 0, 1, \dots, 19$, $\zeta = \exp(\frac{\pi i}{10})$. Assim as 20 soluções para a equação do enunciado são $h(\zeta^k)$, $k = 0, \dots, 19$. Observe que $h(\zeta^{10}) = \infty$; além disso $h(\zeta^5) = 1$ e $h(\zeta^{15}) = -1$ não estão no domínio natural de f . Assim temos 17 soluções legítimas.

Terceira solução:

Temos $f(\tan(\theta)) = \tan(-2\theta)$. Assim $f(f(f(f(\tan(\theta)))))) = \tan(16\theta)$ e $-f(f(\tan(\theta))) = \tan(-4\theta)$. A equação do enunciado é portanto traduzida para $\tan(16\theta) = \tan(-4\theta)$ ou $16\theta = -4\theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que tem soluções essencialmente distintas $\theta = k\pi/20$, $k = 0, 1, \dots, 19$. Assim as soluções para a equação do enunciado são $x = \tan(k\pi/20)$, $k = 0, 1, \dots, 19$; como para as soluções anteriores temos 17 soluções legítimas.

3. **(1,5 ponto)** Defina recursivamente a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, & g(1) &= 1, \\ g(k+2) &= 2g(k+1) + g(k), & k &\geq 0 \end{aligned}$$

de tal forma que, por exemplo,

$$g(2) = 2, \quad g(3) = 5, \quad g(4) = 12, \quad g(5) = 29, \quad g(6) = 70, \quad g(7) = 169.$$

- (a) Demonstre que $g(2k) = g(k)(g(k+1) + g(k-1))$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Encontre todas as potências de 2 na imagem de g .

Primeira solução:

Sejam $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\tilde{\alpha} = -\alpha^{-1} = 1 - \sqrt{2}$ as raízes de $x^2 = 2x + 1$. Sejam

$$\hat{g}(k) = \frac{\alpha^k - \tilde{\alpha}^k}{2\sqrt{2}}; \quad h(k) = \hat{g}(k-1) + \hat{g}(k+1) = \alpha^k + \tilde{\alpha}^k.$$

Vamos inicialmente provar que $\hat{g}(k) = g(k)$ para todo k . A demonstração será feita por indução. Os casos $k = 0$ e $k = 1$ seguem de uma conta direta (e $k = 2, k = 3, \dots$ também). Suponha a fórmula acima verdadeira para k e $k+1$ e vamos verificar que ela vale para $k+2$. Basta portanto verificar que $\hat{g}(k+2) = 2\hat{g}(k+1) + \hat{g}(k)$, o que segue diretamente de $\alpha^{k+2} = 2\alpha^{k+1} + \alpha^k$ e $\tilde{\alpha}^{k+2} = 2\tilde{\alpha}^{k+1} + \tilde{\alpha}^k$.

O item (a) é agora uma conta direta: temos

$$\begin{aligned} g(2k) &= \frac{\alpha^{2k} - \alpha^{-2k}}{2\sqrt{2}}; \\ g(k) &= \frac{\alpha^k - (-1)^k \alpha^{-k}}{2\sqrt{2}}; \quad h(k) = \alpha^k + (-1)^k \alpha^{-k} \end{aligned}$$

donde $g(2k) = g(k)h(k)$, como desejado.

Provamos facilmente por indução que $g(k)$ é par para k par e ímpar para k ímpar. Por outro lado, $g(k) > 1$ para $k > 1$.

Afirmamos $g(1) = 1$ e $g(2) = 2$ são as únicas potências de 2 na imagem de g . Suponha por absurdo que k seja o menor inteiro maior do que 2 tal que $g(k)$ seja potência de 2. Pelo enunciado sabemos que $k > 7$. Pelo parágrafo anterior k deve ser par. Pelo item (a), $g(k/2)$ é divisor de $g(k)$, que é potência de 2; assim $g(k/2)$ é potência de 2. Mas $k/2 > 2$ e $k/2 < k$, o que contradiz a minimalidade de k . Isto completa a resolução do item (b).

Segunda solução:

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por indução,

$$A^k = \begin{pmatrix} g(k-1) & g(k) \\ g(k) & g(k+1) \end{pmatrix}.$$

O item (a) segue agora de $A^{2k} = A^k \cdot A^k$.

A resolução do item (b) é feita como na primeira solução.

Terceira solução:

Queremos provar o item (a) por indução, mas para isto provaremos juntamente que $g(2k+1) = (g(k))^2 + (g(k+1))^2$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Ambas as identidades são facilmente verificadas para $k \leq 3$ usando os valores de $g(k)$ dados no enunciado. Falta o passo de indução.

Suponha que

$$g(2k) = g(k)(g(k+1) + g(k-1)), \quad g(2k+1) = (g(k))^2 + (g(k+1))^2.$$

Temos

$$\begin{aligned} g(2k+2) &= 2g(2k+1) + g(2k) \\ &= 2(g(k))^2 + 2(g(k+1))^2 + g(k)(g(k+1) + g(k-1)) \\ &= 2(g(k+1))^2 + g(k)(g(k+1) + 2g(k) + g(k-1)) \\ &= 2(g(k+1))^2 + 2g(k)g(k+1) = g(k+1)(2g(k+1) + 2g(k)) \\ &= g(k+1)(g(k+2) + g(k)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2k+3) &= 2g(2k+2) + g(2k+1) \\ &= 2g(k+1)(g(k+2) + g(k)) + (g(k))^2 + (g(k+1))^2 \\ &= 2g(k+1)(2g(k+2) - 2g(k+1)) + \\ &\quad + (g(k+2) - 2g(k+1))^2 + (g(k+1))^2 \\ &= (g(k+1))^2 + (g(k+2))^2; \end{aligned}$$

isto completa o passo de indução. O item (b) é feito como na primeira solução.

4. **(2,0 pontos)** Um baralho comum tem 52 cartas divididas em 4 naipes com 13 de cada naipe. Os quatro naipes são: espadas ou $\spadesuit$; copas ou $\heartsuit$; paus ou $\clubsuit$; ouros ou $\diamondsuit$.

Jorge joga um jogo de paciência na qual as cartas são inicialmente embaralhadas e divididas em quatro pilhas de 13 cartas cada. As cartas ficam viradas para baixo, sendo impossível identificá-las sem virá-las.

Jorge tira então uma carta do topo da primeira pilha e a examina, prestando atenção ao naipe. O naipe da carta determina uma pilha: espadas para a primeira pilha, copas para a segunda, paus para a terceira e ouros para a quarta. A carta na mão de Jorge vai então para o final (isto é, para a base) da pilha selecionada, mas agora virada para cima. Jorge então tira uma carta do topo da pilha onde ele acaba de inserir uma carta e novamente a examina. Novamente, a carta vai (virada para cima) para o final de uma das quatro pilhas (novamente selecionada conforme o naipe, sempre usando a mesma regra) e depois Jorge tira uma carta do topo desta mesma pilha. O jogo continua desta forma até Jorge inserir uma carta na base de uma pilha onde todas as cartas já estejam viradas para cima: neste momento o jogo acaba.

Qual é a probabilidade de que ao final do jogo todas as 52 cartas estejam viradas para cima?

Solução:

Vamos modificar o jogo para que ele continue além da versão original: quando for impossível tirar uma carta da mesma pilha onde acabamos de colocar uma carta, dizemos que completamos um ciclo e tiramos a carta da primeira pilha de onde for possível tirar alguma carta. O jogo agora só acaba com todas as cartas viradas para cima. Queremos calcular a probabilidade de que isto aconteça com um único ciclo.

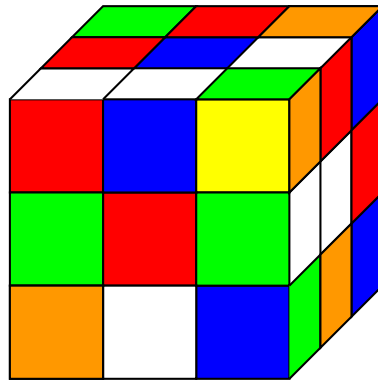
Com este jogo modificado, cada uma das 52 cartas passa pela mão do jogador uma única vez, definindo uma permutação das cartas. Cada vez que ele tira uma carta nova, cada uma das cartas que não apareceu até o momento é igualmente provável, assim cada uma das $52!$ permutações é igualmente provável.

O primeiro ciclo termina quando aparece a última (ou seja, a décima terceira) carta de espadas. Assim o jogo termina em um único ciclo se e somente se a última carta da permutação for de espadas. Assim a probabilidade desejada é igual a $1/4$.

5. **(2,0 pontos)** Adriel ganhou de presente um falso cubo de Rubik, ou seja, um cubo de aresta 3 em que cada uma das seis faces está coberta com nove etiquetas coloridas quadradas de lado 1. Inicialmente cada face tem etiquetas de uma das cores vermelho, laranja, amarelo, verde, azul e branco, sendo portanto uma face de cada cor.

No verdadeiro cubo de Rubik, é possível girar os nove cubinhos que formam uma face mas o cubo falso que Adriel ganhou é sólido em vez de ser formado de cubinhos.

Adriel decide brincar com o cubo retirando as etiquetas e colando-as novamente em outra posição, respeitando a regra de que cada face deve ser coberta por nove etiquetas coloridas nas posições usuais (mas não necessariamente todas da mesma cor).



Quantas configurações diferentes Adriel consegue formar? Considere que as nove etiquetas de uma mesma cor são indiscerníveis; considere também que se uma configuração pode ser obtida a partir de outra girando o cubo então elas são iguais. Por outro lado, se uma configuração é obtida a partir de outra espelhando o cubo, elas em geral são distintas.

Solução:

Vamos inicialmente resolver o problema simplificado com o cubo em uma posição fixa, ou seja, não identificando duas configurações se uma é obtida a partir de outra girando o cubo. Considerando as etiquetas todas distintas, temos $54!$ configurações. Lembrando agora que as etiquetas de cada cor são indiscerníveis, temos que a solução do problema simplificado é que existem $N = 54!/(9!)^6$ configurações.

Devemos agora corrigir este número de acordo com o problema original. Em outras palavras, vamos dividir o conjunto das N configurações em M classes: cada classe consiste nas configurações que podem ser obtidas por rotações. O número M é portanto a solução do problema.

Contando a identidade, há 24 rotações que levam o cubo no cubo. De fato, podemos girar o cubo escolhendo uma das 6 faces para ficar em baixo, em cada caso ainda há 4 escolhas para a face da frente. A classe genérica tem 24 configurações: assim $M \approx N/24$. Esta resposta não é exata, entretanto, pois algumas configurações para o problema simplificado são simétricas, ficando inalteradas por alguma das 23 rotações não triviais e produzindo assim uma classe menor.

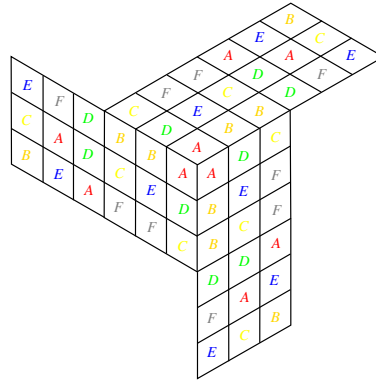


Figura 2: Uma configuração simétrica

A Figura 2 mostra uma tal configuração (as faces de trás foram abertas para poderem ser visíveis). Observe que girar de um terço de volta ao redor do eixo que passa pelo vértice central e pelo centro do cubo mantém a configuração inalterada. Assim a classe desta configuração tem 8 (e não 24) elementos, um para cada posição possível do vértice rodeado por três etiquetas vermelhas (indicadas por um A). Precisamos portanto entender quantas e quais são as configurações simétricas, ou seja, quantas e quais são as classes com menos de 24 elementos.

Vamos primeiro listar as rotações mais explicitamente.

- Há 3 pares de faces opostas e, para cada par, há 3 rotações não triviais ao redor do eixo que liga os centros das duas faces.
Total de rotações não triviais ao redor de faces: 9.
- Há 6 pares de arestas opostas e, para cada par, há uma rotação não trivial ao redor do eixo que liga os centros das duas arestas.
Total de rotações não triviais ao redor de arestas: 6.
- Há 4 pares de vértices opostos e, para cada par, há duas rotações não triviais ao redor do eixo que liga os vértices.
Total de rotações não triviais ao redor de vértices: 8.

Total geral: $24 = 1 + 9 + 6 + 8$, consistentemente com o que vimos acima.

Vamos agora observar que nenhuma configuração é simétrica por rotação ao redor de face ou aresta. Recorde que temos 6 cores e um número ímpar (9) de etiquetas de cada cor. Para uma configuração ser simétrica por rotação ao redor de uma face, as 52 posições de etiqueta fora dos centros das faces perpendiculares ao eixo dividem-se em 26 pares de posições que devem receber etiquetas da mesma cor. Assim pelo menos 4 cores ganham um número par de etiquetas, o que é uma contradição. Para uma configuração ser simétrica por rotação ao redor de uma aresta, as 54 posições dividem-se em 27 pares e o argumento é semelhante (mas mais fácil).

Assim o *único* tipo de configuração simétrica possível é o ilustrado na Figura 2: simetria por rotação ao redor de vértices (note que também é impossível uma configuração ser simultaneamente simétrica por rotação ao redor de dois eixos distintos ligando pares de vértices opostos). Para montar uma tal configuração, inicialmente escolhemos um dos 4 eixos; a seguir devemos distribuir 18 etiquetas, 3 de cada cor, dentre 18 posições (as demais posições seguem por simetria). Temos portanto $4 \cdot 18!/(3!)^6$ configurações simétricas divididas em classes de 8 elementos cada. Em outras palavras, temos $18!/(2 \cdot (3!)^6)$ classes deste tipo.

A resposta final é portanto

$$\frac{1}{24} \left(\frac{54!}{(9!)^6} - 4 \frac{18!}{(3!)^6} \right) + \frac{1}{2} \frac{18!}{(3!)^6} = \frac{54!}{24 \cdot (9!)^6} + \frac{18!}{3 \cdot (3!)^6}.$$

6. **(2,0 pontos)** Um canto de uma sala tem o chão e as duas paredes espelhados. O chão é horizontal e as duas paredes são verticais; o ângulo interno entre as paredes é de 60° . Assim, os dois espelhos nas paredes têm ângulos de 90° e o espelho no chão tem um ângulo de 60° . Se os eixos x e y forem horizontais e o eixo z for vertical, o canto da sala pode ser descrito por

$$z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \geq 0.$$

Neste canto da sala há um gato. Assim, quem olha para o canto vê 12 gatos, ou seja, além do gato vê mais 11 imagens refletidas do gato que não se misturam nem se confundem. Se tomarmos um ponto (por exemplo, o nariz do gato), as suas imagens são os vértices de um prisma retangular de base hexagonal.

Descreva como construir um outro canto de sala com as seguintes propriedades:

- o chão e as duas paredes são espelhados;
- o chão é horizontal e a primeira parede é vertical;
- a segunda parede não é nem vertical, nem perpendicular à segunda parede;
- se há um gato no canto da sala, quem olha vê 120 gatos, ou seja, além do gato vê mais 119 imagens refletidas do gato que não se misturam nem se confundem.

Descreva ainda o poliedro que tem por vértices as imagens de um ponto.

Solução:

Sejam

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6; \quad \phi^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6.$$

Sabemos que $\phi = 1 + \phi^{-1}$ e que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos(36^\circ) = \frac{\phi}{2}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos(72^\circ) = \frac{\phi^{-1}}{2}.$$

O canto da sala desejada pode ser descrito por

$$z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad -\phi x + \phi^{-1}y - z \geq 0.$$

A primeira inequação descreve o chão, que é horizontal (como pedido). A segunda inequação descreve a primeira parede, que é vertical e portanto perpendicular ao chão. A terceira inequação descreve a segunda parede:

observe que ela não é nem vertical nem perpendicular à primeira parede. Mais precisamente, das inequações calculamos facilmente que o ângulo interno entre o chão e a segunda parede é de $\pi/3 = 60^\circ$ e o ângulo interno entre as duas paredes é de $\pi/5 = 36^\circ$.

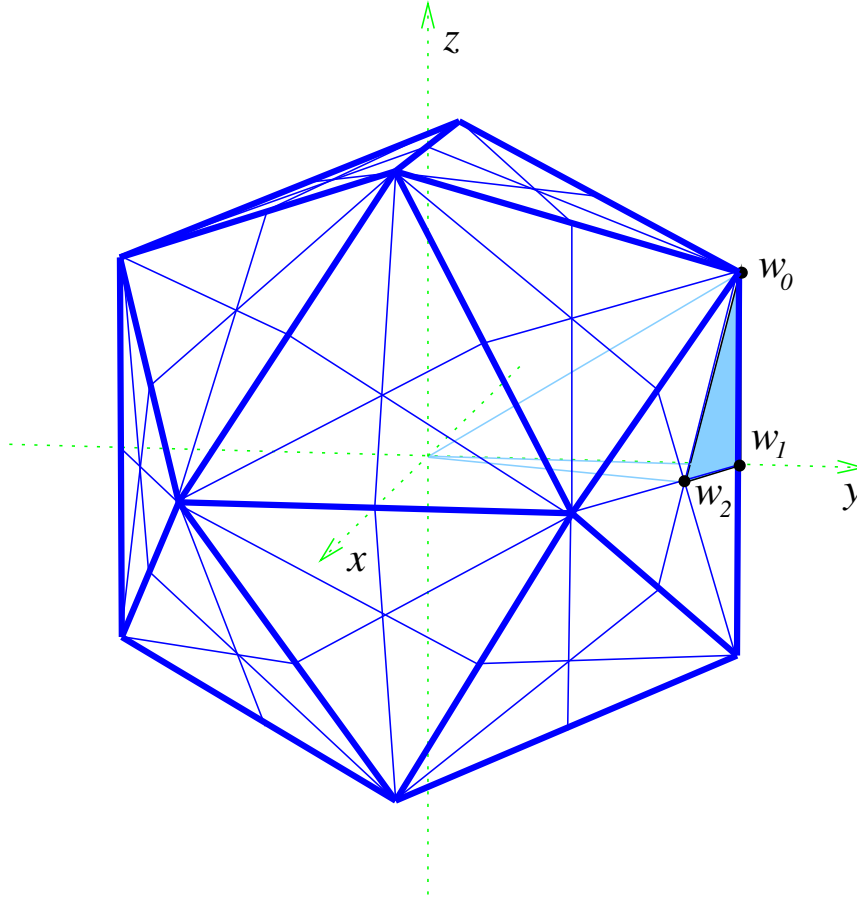


Figura 3: O icosaedro e um canto de sala

Para obter o exemplo acima, considere o icosaedro regular centrado na origem cujos 12 vértices são

$$(\pm 1, \pm \phi^{-1}, 0), (0, \pm 1, \pm \phi^{-1}), (\pm \phi^{-1}, 0, \pm 1).$$

Dois vértices são adjacentes quando a distância entre eles é igual a $2\phi^{-1}$. Assim, por exemplo, os vértices

$$v_0 = (0, 1, \phi^{-1}), \quad v_1 = (0, 1, -\phi^{-1}), \quad v_2 = (1, \phi^{-1}, 0)$$

formam uma face, um triângulo equilátero.

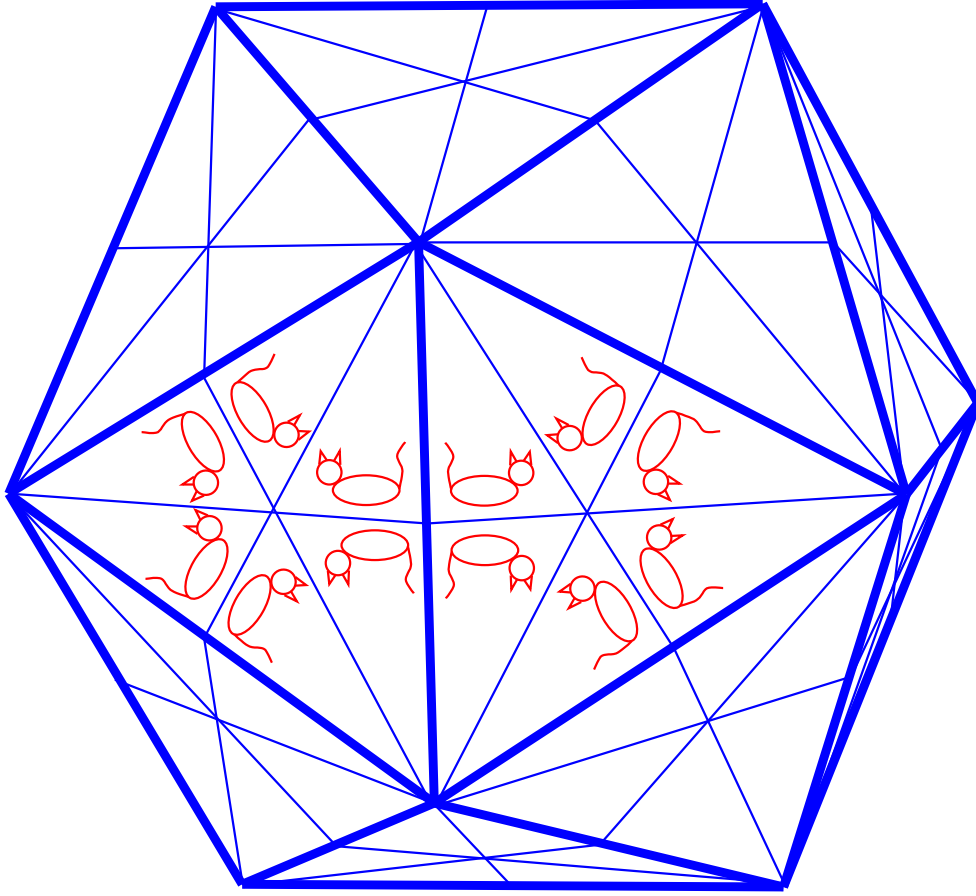


Figura 4: Em uma sala há um canto, neste canto há um gato, ...

Os 15 planos contendo pares de arestas opostas são planos de simetria do icosaedro e dividem cada uma das 20 faces triangulares em 6 triângulos retângulos, conforme a Figura 3, obtendo assim 120 triângulos retângulos. Cada um destes triângulos tem um vértice em um vértice do icosaedro (ângulo interno de 30°), um vértice no centro de uma aresta (ângulo interno de 90°) e o terceiro vértice no centro de uma face (ângulo interno de 60°). Por exemplo, um destes triângulos retângulos tem vértices

$$w_0 = v_0 = (0, 1, \phi^{-1}), \quad w_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} = (0, 1, 0),$$

$$w_2 = \frac{v_0 + v_1 + v_2}{3} = \frac{1}{3}(1, \phi^2, 0).$$

Os planos passando pela origem e por um lado deste triângulo são:

$$w_1 w_2 \rightarrow z = 0, \quad w_0 w_1 \rightarrow x = 0, \quad w_0 w_2 \rightarrow -\phi x + \phi^{-1} y - z = 0.$$

Estes três planos são o chão e as paredes do canto da sala. A aresta entre o chão e a primeira parede é a semi-reta gerada por w_1 , ou seja, é o semi-eixo positivo y . A aresta entre o chão e a segunda parede é gerada por w_2 e a aresta entre as duas paredes é gerada por w_0 . Vemos um gato em cada um dos 120 triângulos retângulos acima (veja a Figura 4).

As imagens de um ponto equidistante das três paredes são os vértices de um poliedro arquimediato chamado de icosidodecaedro truncado: suas faces são quadrados, hexágonos e decágonos regulares, com um poliedro de cada tipo incidente a cada vértice. São 20 faces hexagonais (paralelas às faces do icosaedro), 30 faces quadradas (correspondentes às arestas do icosaedro) e 12 faces decagonais (correspondentes aos vértices do icosaedro e paralelas às faces do dodecaedro dual). Para um ponto genérico, estas faces não são regulares mas ainda têm ângulos internos iguais e arestas alternadas iguais.