

PUC-Rio
Desafio em Matemática
4 de outubro de 2015

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

Carlos sorteia um número inteiro (entre 2 e 12) jogando dois dados comuns (cubos com 6 faces numeradas de 1 a 6) e somando os números que aparecem: ele anota este total.

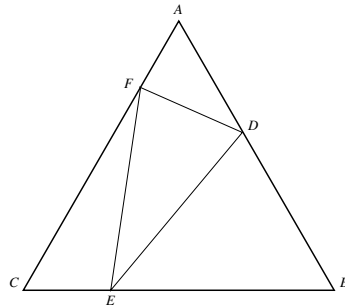
Ele volta a sortear um inteiro pelo mesmo processo e novamente anota o total. Carlos tem agora dois números anotados.

Qual é a probabilidade de que os dois números anotados sejam iguais?

2. (1,0 pontos)

Definimos o diâmetro de um triângulo como sendo o comprimento de seu maior lado.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1. Sabemos que os pontos D , E e F pertencem aos segmentos AB , BC e CA respectivamente.



Determine o valor máximo e mínimo possíveis para o diâmetro do triângulo DEF .

3. (1,5 pontos)

Considere os polinômios P_k definidos por

$$P_1(x) = \frac{x^3 - 3x}{2}; \quad P_{k+1}(x) = P_k(P_1(x)).$$

- (a) Encontre todas as raízes reais das equações $P_1(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ e $P_1(x) = -1$.
- (b) Quantas raízes reais tem a equação $P_{2015}(x) = 0$?
- (c) Quantas raízes reais da equação $P_{2015}(x) = 2015$ pertencem ao intervalo $(2, 3)$?

4. **(1,5 ponto)**

Para um real x , seja $\lfloor x \rfloor$ a *parte inteira* de x , ou seja,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < 1 + \lfloor x \rfloor, \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Encontre o último algarismo da expansão decimal de

$$\left\lfloor (1 + \sqrt{2})^{2015} \right\rfloor.$$

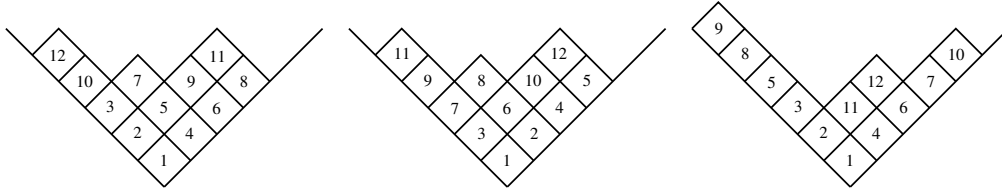
5. **(1,5 ponto)**

Considere um dodecaedro regular de aresta 1. Sejam A e B vértices opostos. Cortamos o dodecaedro ao longo do plano mediador do segmento AB (ou seja, o conjunto dos pontos equidistantes de A e B).

Descreva a interseção deste plano com o dodecaedro e calcule a área desta interseção.

6. (1,5 pontos)

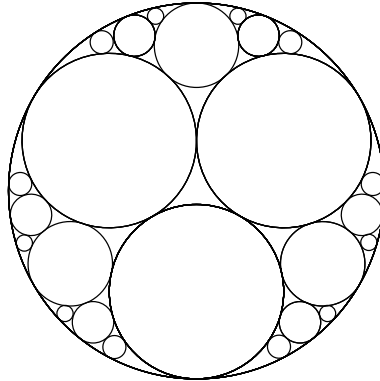
Quadrinhos numerados de 1 a n caem em ordem no fundo da região $y \geq |x|$. Cada quadrinho se acomoda formando uma pilha estável antes do próximo quadrinho cair. A figura abaixo mostra três pilhas possíveis para $n = 12$. Note que as duas primeiras têm o mesmo formato, mas são pilhas distintas pois os números aparecem em posições diferentes.



- Para $n = 5$, identifique todos os formatos possíveis para a pilha de quadrinhos ao final do processo (sem levar em conta as posições dos números).
- Para cada um dos formatos encontrado no item anterior, determine quantas pilhas distintas existem.

7. (2,0 pontos)

Inscrevemos dentro do círculo unitário (de equação $x^2 + y^2 = 1$) três círculos menores, de mesmo raio, tangentes dois a dois e tangentes ao círculo unitário nos pontos $(0, -1)$ e $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Dentro de cada triângulo curvilíneo formado junto ao círculo unitário inscrevemos um novo círculo. Repetimos o processo indefinidamente, conforme sugerido na figura.



Determine se em algum momento construímos um círculo tangente ao círculo unitário no ponto $(1, 0)$.