

PUC-Rio
Desafio em Matemática
4 de outubro de 2015

Nome: **GABARITO** _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. (1,0 ponto)

Carlos sorteia um número inteiro (entre 2 e 12) jogando dois dados comuns (cubos com 6 faces numeradas de 1 a 6) e somando os números que aparecem: ele anota este total.

Ele volta a sortear um inteiro pelo mesmo processo e novamente anota o total. Carlos tem agora dois números anotados.

Qual é a probabilidade de que os dois números anotados sejam iguais?

Solução:

Uma contagem de casos revela que as probabilidades de que o total do lançamento de dois dados comuns seja igual a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 são, nesta ordem,

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}.$$

Assim, as probabilidades de que os dois totais sejam ambos iguais a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 são, nesta ordem,

$$\frac{1^2}{6^4}, \frac{2^2}{6^4}, \frac{3^2}{6^4}, \frac{4^2}{6^4}, \frac{5^2}{6^4}, \frac{6^2}{6^4}, \frac{5^2}{6^4}, \frac{4^2}{6^4}, \frac{3^2}{6^4}, \frac{2^2}{6^4}, \frac{1^2}{6^4}.$$

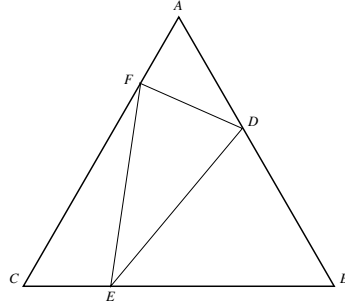
Assim, a probabilidade pedida, ou seja, de que os dois totais sejam iguais, é igual a

$$p = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}{6^4} = \frac{146}{1296} = \frac{73}{648}.$$

2. (1,0 pontos)

Definimos o diâmetro de um triângulo como sendo o comprimento de seu maior lado.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1. Sabemos que os pontos D , E e F pertencem aos segmentos AB , BC e CA respectivamente.



Determine o valor máximo e mínimo possíveis para o diâmetro do triângulo DEF .

Solução:

O valor máximo é igual a 1, correspondente ao caso $D = A$, $E = B$ e $F = C$. O valor mínimo é igual a $\frac{1}{2}$, correspondente ao caso em que D , E e F são os pontos médios de AB , BC e CA , respectivamente. A verificação destes casos é imediata. Resta provar que para qualquer triângulo DEF satisfazendo as condições do enunciado temos

$$\frac{1}{2} \leq \text{diam}(DEF) \leq 1.$$

Note inicialmente que $|DE| \leq 1$. De fato, fixando D como um ponto qualquer do segmento AB o ponto E que maximiza $|DE|$ é $E = C$; fixando $E = C$, o ponto D que maximiza $|DE|$ é $D = A$, correspondente a $|DE| = 1$. Analogamente, temos $|EF| \leq 1$ e $|FD| \leq 1$. Assim,

$$\text{diam}(DEF) = \max(|DE|, |EF|, |FD|) \leq 1.$$

Sabemos por outro lado que o triângulo órtico (tendo como vértices as bases das alturas) é o que minimiza o perímetro. Assim,

$$\text{diam}(DEF) \geq \frac{|DE| + |EF| + |FD|}{3} \geq \frac{1}{2}.$$

3. (1,5 pontos)

Considere os polinômios P_k definidos por

$$P_1(x) = \frac{x^3 - 3x}{2}; \quad P_{k+1}(x) = P_k(P_1(x)).$$

- (a) Encontre todas as raízes reais das equações $P_1(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ e $P_1(x) = -1$.
- (b) Quantas raízes reais tem a equação $P_{2015}(x) = 0$?
- (c) Quantas raízes reais da equação $P_{2015}(x) = 2015$ pertencem ao intervalo $(2, 3)$?

Solução:

As três equações do item (a) são equivalentes, na ordem acima, a

$$x^3 - 3x = 0, \quad x^3 - 3x - 2 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

que fatoram como

$$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0, \quad (x + 1)^2(x - 2) = 0, \quad (x - 1)^2(x + 2) = 0.$$

Assim as raízes são

$$0, \pm\sqrt{3}; \quad -1, -1, 2; \quad 1, 1, -2.$$

Segue daí que P_1 leva bijetiva e monotonamente (conforme a figura):

- $(-\infty, -1]$ em $(-\infty, +1]$, crescente;
- $[-1, +1]$ em $[-1, +1]$, decrescente;
- $[+1, +\infty)$ em $[-1, +\infty)$, crescente.

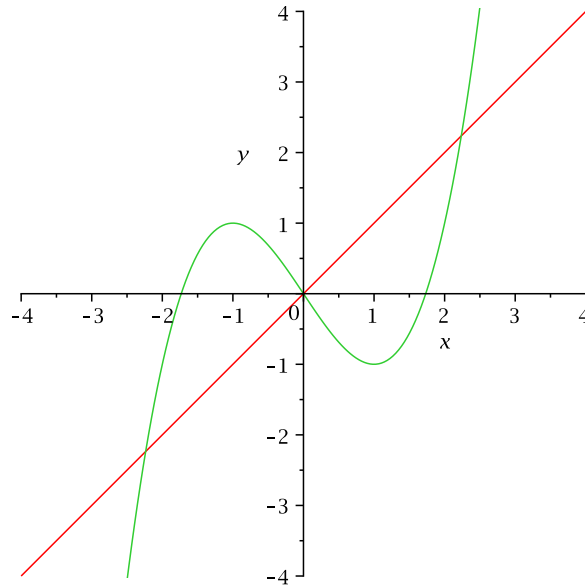
Assim, a equação

$$P_1(x) = y$$

tem 3 raízes reais se $|y| < 1$ e 1 raiz real se $|y| > 1$. Observe ainda que $P_1(\pm\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5}$.

As soluções reais de $P_1(x) = 0$ são três: 0 , $z_1 = +\sqrt{3}$ e $-z_1$.

As soluções reais de $P_2(x) = 0$, ou, equivalentemente, de $P_1(P_1(x)) = 0$ são as soluções de $P_1(x) = 0$ (as três acima: 0 e $\pm z_1$), $P_1(x) = z_1$ (um número z_2 entre z_1 e $\sqrt{5}$) e de $P_1(x) = -z_1$ (o número $-z_2$, que está entre $-\sqrt{5}$ e $-z_1$). Assim, $P_2(x) = 0$ tem 5 raízes reais: 0 , $\pm z_1$ e $\pm z_2$ (e quatro complexas que não são do nosso interesse).



Da mesma forma, as soluções reais de $P_3(x) = 0$, ou, equivalentemente, de $P_2(P_1(x)) = 0$ são as soluções de $P_1(x) = 0$ (0 e $\pm z_1$), $P_1(x) = z_1$ (z_2), $P_1(x) = -z_1$ ($-z_2$), $P_1(x) = z_2$ (um número z_3 entre z_2 e $\sqrt{5}$) e de $P_1(x) = -z_2$ (o número $-z_3$, que está entre $-\sqrt{5}$ e $-z_2$). Assim, $P_3(x) = 0$ tem 7 raízes reais: 0, $\pm z_1$, $\pm z_2$ e $\pm z_3$. Procedendo desta forma (ou, mais formalmente, por indução), vemos que $P_k(x)$ tem $2k + 1$ raízes: 0 e $\pm z_j$ para $1 \leq j \leq k$, onde definimos recursivamente z_j como a (única) raiz real de $P_1(z_j) = z_{j-1}$. Em particular, $P_{2015}(x) = 0$ tem 4031 raízes reais.

Já vimos que se $y > \sqrt{5}$ então a equação $P_1(x) = y$ tem uma única raiz real que também é maior do que $\sqrt{5}$. Repetindo o processo, $P_{2015}(x) = 2015$ admite uma única raiz real que também é maior do que $\sqrt{5}$. Resta saber se esta raiz é maior ou menor que 3. Temos $P_1(3) = 9$, $P_2(3) = P_1(9) = 351$ e $P_3(3) = P_1(351) > 2015$ donde $P_{2015}(3)$ é (muito) maior do que 2015. Assim a única raiz real de $P_{2015}(x) = 2015$ pertence ao intervalo $(2, 3)$.

4. (1,5 ponto)

Para um real x , seja $\lfloor x \rfloor$ a *parte inteira* de x , ou seja,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < 1 + \lfloor x \rfloor, \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Encontre o último algarismo da expansão decimal de

$$\left\lfloor (1 + \sqrt{2})^{2015} \right\rfloor.$$

Solução:

Observe que $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ são as raízes de $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Considere

$$a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n.$$

Temos

$$a_0 = a_1 = 2, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n.$$

Como $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$ temos

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1, \quad n \equiv 1 \pmod{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \left| (1 + \sqrt{2})^n \right|.$$

Queremos portanto encontrar o último algarismo de a_{2015} . Para isto vamos calcular o último algarismo de a_n , ou seja, vamos estudar $a_n \bmod 10$. Abaixo, todas as congruências são tomadas modulo 10. Cada termo é encontrado a partir dos dois anteriores usando a recorrência acima.

$$\begin{array}{cccccc} a_0 \equiv 2, & a_1 \equiv 2, & a_2 \equiv 6, & a_3 \equiv 4, & a_4 \equiv 4, & a_5 \equiv 2, \\ a_6 \equiv 8, & a_7 \equiv 8, & a_8 \equiv 4, & a_9 \equiv 6, & a_{10} \equiv 6, & a_{11} \equiv 8, \\ a_{12} \equiv 2, & a_{13} \equiv 2, & a_{14} \equiv 6, & a_{15} \equiv 4, & a_{16} \equiv 4, & a_{17} \equiv 2, \\ & & \vdots & & & \end{array}$$

Como $a_{12} \equiv a_0$ e $a_{13} \equiv a_1$, segue que $a_n \bmod 10$ tem período 12, ou seja,

$$\forall n_0, n_1 \in \mathbb{N}, \quad n_0 \equiv n_1 \pmod{12} \quad \Rightarrow \quad a_{n_0} \equiv a_{n_1} \pmod{10}.$$

Temos $2015 \equiv 11 \pmod{12}$ donde $a_{2015} \equiv 8 \pmod{10}$. Assim o último algarismo de

$$\left| (1 + \sqrt{2})^{2015} \right|$$

é 8.

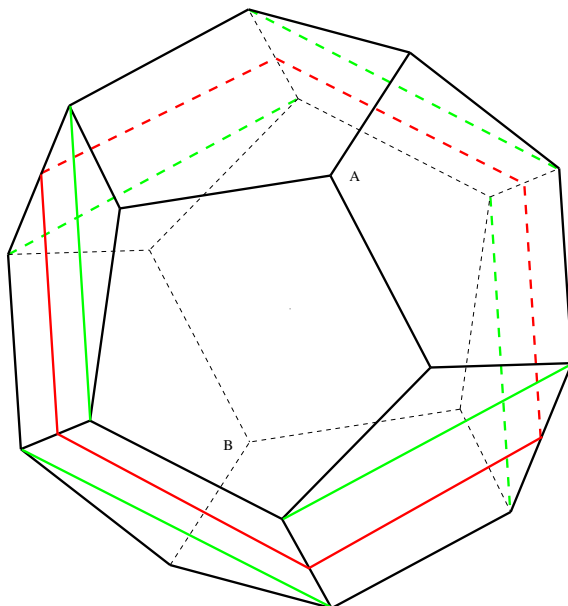
5. (1,5 ponto)

Considere um dodecaedro regular de aresta 1. Sejam A e B vértices opostos. Cortamos o dodecaedro ao longo do plano mediador do segmento AB (ou seja, o conjunto dos pontos equidistantes de A e B).

Descreva a interseção deste plano com o dodecaedro e calcule a área desta interseção.

Solução:

A figura mostra um dodecaedro regular, vértices opostos A e B e (em vermelho) a interseção do plano mediador de AB com o dodecaedro.



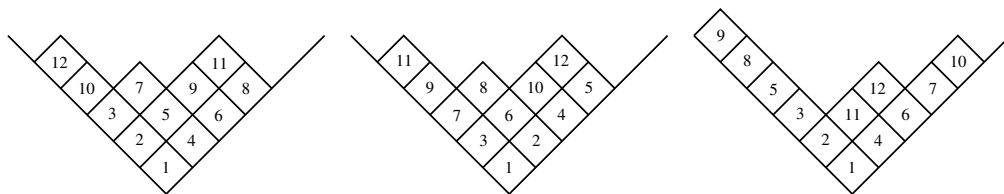
Veja que esta interseção é um hexágono regular cujos vértices são os pontos médios das 6 arestas que cruzam o plano mediador. Cada lado do hexágono (em vermelho) é a base média de um trapézio isósceles cujas bases são um lado do pentágono e uma diagonal (em verde). Sabemos que se o lado de um pentágono regular mede 1 sua diagonal mede $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Assim o lado do hexágono mede $(1 + \varphi)/2 = (3 + \sqrt{5})/4$.

Sabemos que a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é igual a $(\sqrt{3}/4)\ell^2$ donde a área de um hexágono regular de lado ℓ é igual a $(3\sqrt{3}/2)\ell^2$. Assim a área do nosso hexágono é igual a

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 = \frac{21\sqrt{3} + 9\sqrt{15}}{16}.$$

6. (1,5 pontos)

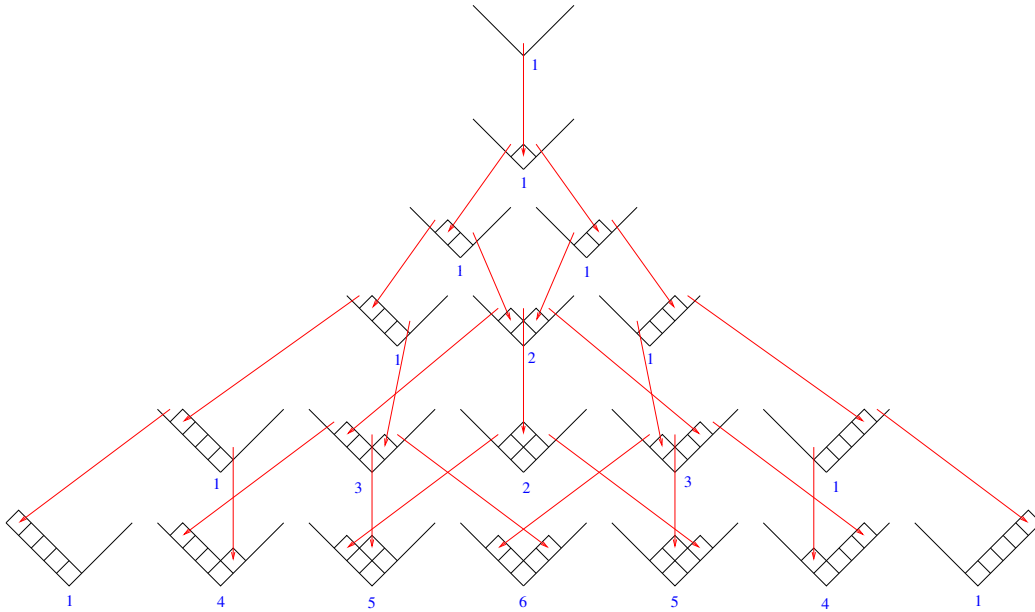
Quadrinhos numerados de 1 a n caem em ordem no fundo da região $y \geq |x|$. Cada quadrinho se acomoda formando uma pilha estável antes do próximo quadrinho cair. A figura abaixo mostra três pilhas possíveis para $n = 12$. Note que as duas primeiras têm o mesmo formato, mas são pilhas distintas pois os números aparecem em posições diferentes.



- Para $n = 5$, identifique todos os formatos possíveis para a pilha de quadrinhos ao final do processo (sem levar em conta as posições dos números).
- Para cada um dos formatos encontrado no item anterior, determine quantas pilhas distintas existem.

Solução:

O diagrama abaixo mostra todas as possibilidades para o processo até $n = 5$. Inicialmente a região está vazia (diagrama no topo). Quando chega o primeiro quadradinho ele obrigatoriamente entra no fundo da região, e passamos do diagrama no topo para aquele diretamente abaixo.



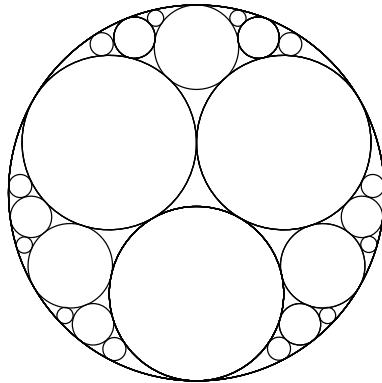
Em geral, cada seta vermelha indica a chegada de um quadradinho: ela liga a posição vazia onde o quadradinho pode entrar no diagrama de cima com a posição agora cheia no diagrama de baixo.

Os números azuis indicam o número de maneiras como cada diagrama pode ser alcançado e portanto o número de pilhas distintas com cada formato. Assim, cada número azul é a soma de seus vizinhos de cima (os diagramas dos quais partem setas vermelhas chegando nele). Esta é uma maneira fácil de preencher os números azuis.

Em particular, para $n = 5$ temos os 7 diagramas da última linha, que podem ser alcançados de 1, 4, 5, 6, 5, 4 e 1 maneira, respectivamente.

7. (2,0 pontos)

Inscrivemos dentro do círculo unitário (de equação $x^2 + y^2 = 1$) três círculos menores, de mesmo raio, tangentes dois a dois e tangentes ao círculo unitário nos pontos $(0, -1)$ e $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Dentro de cada triângulo curvilíneo formado junto ao círculo unitário inscrevemos um novo círculo. Repetimos o processo indefinidamente, conforme sugerido na figura.

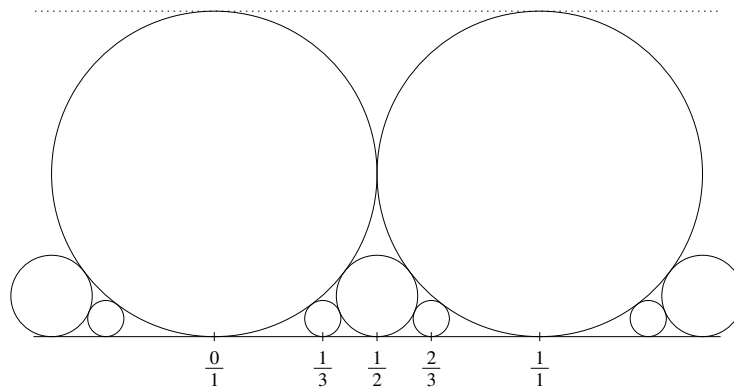


Determine se em algum momento construímos um círculo tangente ao círculo unitário no ponto $(1, 0)$.

Solução:

A resposta é que **não**: nunca construiremos um círculo tangente ao círculo unitário em $(1, 0)$. Mais geralmente, se um círculo é construído tangenciando o círculo unitário em $(x_0, y_0) \neq (0, -1)$ então $\sqrt{3}x_0/(1 + y_0)$ é racional.

Para demonstrar este fato fazemos uma inversão com centro no ponto $(0, -1)$ para obter a figura abaixo, conhecida como a dos *círculos de Ford*.



Mais precisamente, suponhamos que a imagem do círculo unitário pela inversão seja o eixo horizontal.

- O círculo tangente ao círculo unitário em $(0, -1)$ é levado em uma reta horizontal (pontilhada na figura).
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ são levados em círculos que tangenciam o eixo horizontal em $(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, indicados na figura por 1 e 0 (para obtermos a figura usual).
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ são levados em círculos que tangenciam o eixo horizontal em $(\pm \sqrt{3}, 0)$, que seriam indicados na figura por 2 e -1 .
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em $(0, 1)$ é levado no círculo menos que tangencia o eixo horizontal na origem, indicado por $\frac{1}{2}$.

Resta provar que na nova figura, todos os círculos tangenciam o eixo horizontal em um ponto indicado por um racional. Para isto, basta provar recursivamente as seguintes afirmações do próximo parágrafo.

Sejam dois círculos em posições $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1}$ tangentes entre si e portanto formando com o eixo horizontal um triângulo curvilíneo. Temos $p_1q_0 - p_0q_1 = 1$ e os círculos têm raios $\frac{1}{2q_0^2}$ e $\frac{1}{2q_1^2}$, respectivamente. O novo círculo inscrito neste triângulo curvilíneo tem posição $\frac{p}{q}$ com $p = p_0 + p_1$, $q = q_0 + q_1$ e seu raio é $\frac{1}{2q^2}$.