

PUC-Rio
Desafio em Matemática
25 de setembro de 2016

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,0		
4	1,5		
5	1,5		
6	2,0		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

Seja $r > 0$. Considere a parábola de equação $y = x^2$ e o círculo de centro $(0, r)$ e raio r . Determine os pontos de interseção entre o círculo e a parábola; divida em casos conforme o valor de r se necessário.

2. **(1,0 ponto)**

Em Tumbolia existem três tipos de moeda: a moeda de alumínio que vale 21 zorkmids, a moeda de bronze que vale 30 zorkmids e a moeda de cobre que vale 140 zorkmids.

- (a) Usando os três tipos de moeda como pagamento ou troco, mostre como é possível efetuar um pagamento de 1 zorkmid.
- (b) Encontre um natural N com a seguinte propriedade: para todo natural $n > N$ é possível efetuar um pagamento de n zorkmids sem precisar de troco (usando os três tipos de moeda, ou alguns entre eles).

3. (1,0 ponto)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo no plano. Sejam E , F , G e H tais que os triângulos ABE , BCF , CDG e DAH sejam exteriores ao quadrilátero $ABCD$, isósceles e retângulos sendo a hipotenusa um lado do quadrilátero original.

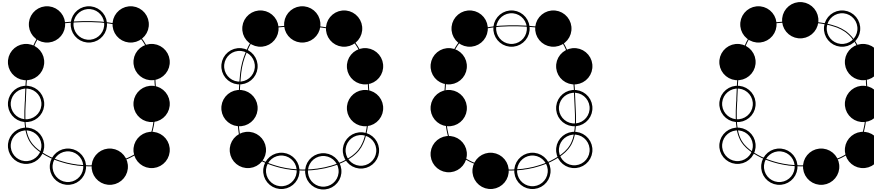
Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

- (a) Se $ABCD$ é um paralelogramo então $EFGH$ é um quadrado.
- (b) Se $EFGH$ é um paralelogramo então $ABCD$ é um paralelogramo.

4. (1,5 ponto)

Seja p primo, $p > 2$; seja $a > 1$ inteiro. Juliana dispõe de muitas contas coloridas de a cores diferentes (duas contas da mesma cor são iguais). Ela quer montar colares com p contas. Quantos colares distintos são possíveis?

A figura mostra alguns colares para $p = 11$ e $a = 2$. Os três primeiros são iguais; o quarto é diferente dos outros três.



5. (1,5 ponto)

Zé Roberto e Umberto gostam de jogar par ou ímpar; Zé Roberto sempre pede par e Umberto sempre pede ímpar. Eles gostam de inventar novas maneiras de jogar.

A última maneira que eles inventaram usa um dado comum, com seis faces numeradas de 1 a 6. Eles jogam o dado várias vezes até que um número saia três vezes seguidas; Zé Roberto ganha se este número for par, Umberto ganha se for ímpar. Sábado de manhã o dado teve os resultados:

5, 3, 4, 2, 6, 1, 1, 3, 1, 4, 2, 3, 5, 6, 3, 4, 5, 4, 4, 4

e neste ponto Zé Roberto se declarou vitorioso.

Sábado de tarde o dado teve os resultados:

6, 1, 4, 2, 3, 5, 6, 6;

neste momento o jogo foi interrompido pela queda de um meteorito.

Quando a situação se acalmou, eles concordaram em continuar do ponto em que estavam. Qual é a probabilidade de que Zé Roberto seja o vencedor?

6. (2,0 pontos)

Considere um tetraedro regular de aresta 1 e de vértices V_1, V_2, V_3, V_4 .

Trisecte cada aresta $V_i V_j$ por pontos T_{ij} e T_{ji} ; assim os segmentos $V_i T_{ij}$, $T_{ij} T_{ji}$ e $T_{ji} V_j$ têm todos comprimento $\frac{1}{3}$ e a mesma orientação.

Para cada uma das 24 permutações $\Pi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, considere o segmento $s_\Pi = T_{\Pi(1)\Pi(2)} T_{\Pi(3)\Pi(4)}$, ou seja, o segmento de reta (contido no tetraedro original) cujos extremos são $T_{\Pi(1)\Pi(2)}$ e $T_{\Pi(3)\Pi(4)}$. Por exemplo, para Π a permutação identidade temos que os extremos de s_Π são T_{12} e T_{34} . Dados dois tais segmentos s_{Π_0} e s_{Π_1} , seja P_{Π_0, Π_1} seu ponto de interseção, desde que exista e seja único (assim, por exemplo, P_{Π_0, Π_0} não está definido já que os segmentos são iguais).

(a) Quantos pontos P_{Π_0, Π_1} distintos existem?

(b) Seja A o fecho convexo do conjunto dos pontos de interseção obtidos no item anterior. Determine quantas faces tem o poliedro A e quantos lados tem cada face.

(Observação: O fecho convexo de um conjunto finito X de pontos do espaço é o menor poliedro convexo contendo X . Em outras palavras, o fecho convexo de X é a interseção de todos os semiespaços contendo X .)

7. **(2,0 pontos)**

Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g(n) = n - g(g(n-1)).$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} g(2) &= 2 - g(g(1)) = 1, & g(3) &= 3 - g(g(2)) = 2, \\ g(4) &= 4 - g(g(3)) = 3, & g(5) &= 5 - g(g(4)) = 3. \end{aligned}$$

Encontre números reais a , b_0 e b_1 para os quais

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad an + b_0 \leq g(n) \leq an + b_1.$$