

PUC-Rio
Desafio em Matemática
1 de outubro de 2017

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,5		
2	1,5		
3	1,5		
4	1,5		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,5 ponto)**

Seja $a > 0$; seja p o polinômio $p(t) = at(1 - t)$. No plano $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (x, y) , considere as duas parábolas de equações $y = p(x)$ e $x = p(y)$.

Determine os pontos de interseção entre as duas parábolas; divida em casos conforme o valor de a se necessário.

2. (1,5 ponto)

Sejam ω_1 e ω_2 círculos no plano euclidiano, intersectando-se em pontos P e $\tilde{P}$. Lembre que o ângulo entre ω_1 e ω_2 em P é igual ao ângulo entre as retas r_1 e r_2 , tangentes em P a ω_1 e ω_2 , respectivamente. Em particular, ω_1 e ω_2 são ortogonais se este ângulo for reto.

Seja ω_0 um círculo; sejam A , B , C e D pontos de ω_0 que são vértices de um quadrado (nesta ordem, de forma que A e C são opostos). Seja ω_{AB} o único círculo ortogonal a ω_0 contendo A e B ; seja M o ponto médio do arco de A a B contido em ω_{AB} e interior a ω_0 . Seja ω_{DM} o único círculo ortogonal a ω_0 contendo D e M .

Seja θ o ângulo agudo entre ω_{AB} e ω_{DM} (em M). Calcule $\cos \theta$.

3. (1,5 ponto)

No espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) , considere os infinitos planos de equações $x = i$, $y = j$, $z = k$ onde $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Observe que estes planos decompõem o espaço em cubos unitários cujos vértices têm coordenadas inteiras: chamamos estes cubos de *cubos unitários inteiros*. Mais precisamente, um cubo unitário inteiro tem a forma

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1, k \leq z \leq k+1\} = \\ = [i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1], \quad i, j, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Considere também a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ e a bola fechada definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 7$.

- (a) Quantos cubos unitários inteiros estão contidos na bola fechada acima?
- (b) Quantos cubos unitários inteiros são cortados por esta esfera?
(Dizemos que um cubo é cortado pela esfera quando ele tem pelo menos um ponto na bola aberta $x^2 + y^2 + z^2 < 7$ mas não está contido na bola fechada.)

4. (1,5 ponto)

Sejam $p_1 = 24000001$ e $p_2 = 30000001$; sabemos que ambos são primos.

Seja $N = p_1 p_2$.

- (a) Para quantos inteiros a , $0 < a < N$, temos $\text{mdc}(a, N) = 1$?
- (b) Para quantos inteiros b , $0 < b < N$, temos que $b^2 + 1$ é múltiplo de N ?
- (c) Dado um inteiro a com $0 < a < N$ e $\text{mdc}(a, N) = 1$, seja $m = \text{ord}_N(a)$ o menor inteiro positivo para o qual $a^m - 1$ é múltiplo de N . Para quantos valores de a temos que m é ímpar?
- (d) Seja a inteiro com $0 < a < N$ e $\text{mdc}(a, N) = 1$ e seja $m = \text{ord}_N(a)$ definido como no item anterior. Para quantos valores de a temos que m é par e que $a^{(m/2)} + 1$ é múltiplo de N ?

(Obs: contas simples mas trabalhosas podem ser deixadas indicadas.)

5. (2,0 ponto)

Rosencrantz e Guildenstern gostam de jogar cara ou coroa. Rosencrantz sempre aposta em **cara** e Guildenstern sempre aposta em **coroa**. Eles gostam de inventar novas maneiras de jogar.

A última maneira que eles inventaram usa uma moeda comum. Eles combinam um número inteiro positivo N e jogam a moeda várias vezes contando as ocorrências até que tenham saído exatamente N **caras**. Cada **coroa** vale um ponto para Guildenstern e cada **cara** vale um ponto para Rosencrantz. Quando o jogo termina, quem tiver tirado menos pontos deve pagar para o vencedor uma moeda por cada ponto de diferença.

Por exemplo, sábado de manhã eles combinaram $N = 5$ e obtiveram os seguintes resultados (com **H** para **cara** e **T** para **coroa**):

HTHTHHH

e com isso o jogo acabou com um placar de 5 a 2 e Guildenstern pagou três moedas a Rosencrantz.

Em função de N , responda:

- (a) Qual é a probabilidade de que haja empate (ou seja, uma placar de N a N)?
- (b) Qual é o placar final mais provável?
(Se houver mais de um placar final com igual probabilidade máxima indique quais são estes placares.)
- (c) Qual é a probabilidade de que Rosencrantz ganhe (por qualquer placar)?

6. (2,0 ponto)

Seja n um inteiro positivo. Consideramos linhas poligonais P de vértices

$$(0, 0), (1, x_1), \dots, (n, x_n), (n+1, 0); \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}.$$

Escrevemos $P = [x_1, \dots, x_n]$ e convencionamos que $x_0 = x_{n+1} = 0$. Assim, por exemplo, para $n = 3$ a poligonal $P = [3, 4, 3]$ tem vértices $(0, 0), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 0)$, nesta ordem.

Podemos passar de uma linha poligonal $P = [x_1, \dots, x_n]$ para uma linha poligonal $Q = [y_1, \dots, y_n]$, indicado por $P \rightarrow Q$, se existir $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

- $x_j = y_j$ para todo $j \neq k$;
- $2x_k > x_{k-1} + x_{k+1}$;
- $y_k = x_{k-1} - x_k + x_{k+1} + 1$.

Assim, por exemplo, para $n = 3$ temos

$$[3, 4, 3] \rightarrow [2, 4, 3] \rightarrow [2, 2, 3] \rightarrow [1, 2, 3] \rightarrow [1, 2, 0] \rightarrow [1, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0].$$



Escrevemos $P \Rightarrow Q$ se existe um inteiro positivo k e poligonais $P = Q_k, Q_{k-1}, \dots, Q_1, Q_0 = Q$ tais que

$$Q_k \rightarrow Q_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0.$$

Assim, por exemplo, vimos acima que $[3, 4, 3] \Rightarrow [0, 0, 0]$.

- (a) Em função de n , determine quantas poligonais P satisfazem $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$.
- (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, com justificativa.
Se $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$, $Q \Rightarrow [0, \dots, 0]$ e a poligonal P está sempre acima da poligonal Q (exceto pelos extremos $(0, 0)$ e $(n+1, 0)$) então $P \Rightarrow Q$.

