

PUC-Rio
Desafio em Matemática
1 de outubro de 2017

Nome: GABARITO _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,5		
2	1,5		
3	1,5		
4	1,5		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. (1,5 ponto)

Seja $a > 0$; seja p o polinômio $p(t) = at(1 - t)$. No plano $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (x, y) , considere as duas parábolas de equações $y = p(x)$ e $x = p(y)$.

Determine os pontos de interseção entre as duas parábolas; divida em casos conforme o valor de a se necessário.

Solução:

Observe que o enunciado pede os pontos de interseção reais. Vamos inicialmente identificar os pontos de interseção sobre a reta diagonal $x = y$:

$$p(x) = x \implies ax(1 - x) = x \implies x = 0 \vee x = \frac{a - 1}{a}.$$

Para um ponto de interseção (x, y) qualquer, devemos ter $x = p(p(x))$ donde

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + (a^3 + a^2)x^2 + (-a^2 + 1)x = 0. \quad (*)$$

Queremos fatorar o polinômio do lado esquerdo. A partir das considerações anteriores já temos duas raízes ($x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{a-1}{a}$), e portanto dois fatores (x e $ax - (a - 1)$). Assim a equação $(*)$ pode ser reescrita como

$$x(ax - (a - 1))(a^2x^2 + (-a^2 - a)x + (a + 1)) = 0$$

que tem raízes $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{a-1}{a}$ (já identificadas) e

$$x_2 = \frac{(a + 1) + \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}, \quad x_3 = \frac{(a + 1) - \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}.$$

Note que estas duas novas raízes são reais para $a \geq 3$. Assim:

- Para $0 < a < 1$ temos dois pontos de interseção: $(0, 0)$ e (x_1, x_1) , com $x_1 < 0$. Os dois pontos de interseção são simples.
- Para $a = 1$ temos um ponto de interseção: $(0, 0)$.
Este ponto de interseção é duplo.
- Para $1 < a < 3$ temos dois pontos de interseção: $(0, 0)$ e (x_1, x_1) , $0 < x_1 < \frac{2}{3}$. Os dois pontos de interseção são simples.
- Para $a = 3$ temos dois pontos de interseção: $(0, 0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
O primeiro ponto de interseção é simples e o segundo é triplo.
- Para $a > 3$ temos quatro pontos de interseção: $(0, 0)$, (x_1, x_1) , (x_2, x_3) e (x_3, x_2) . Os quatro pontos de interseção são simples.

2. (1,5 ponto)

Sejam ω_1 e ω_2 círculos no plano euclidiano, intersectando-se em pontos P e $\tilde{P}$. Lembre que o ângulo entre ω_1 e ω_2 em P é igual ao ângulo entre as retas r_1 e r_2 , tangentes em P a ω_1 e ω_2 , respectivamente. Em particular, ω_1 e ω_2 são ortogonais se este ângulo for reto.

Seja ω_0 um círculo; sejam A, B, C e D pontos de ω_0 que são vértices de um quadrado (nesta ordem, de forma que A e C são opostos). Seja ω_{AB} o único círculo ortogonal a ω_0 contendo A e B ; seja M o ponto médio do arco de A a B contido em ω_{AB} e interior a ω_0 . Seja ω_{DM} o único círculo ortogonal a ω_0 contendo D e M .

Seja θ o ângulo agudo entre ω_{AB} e ω_{DM} (em M). Calcule $\cos \theta$.

Solução:

Considere que $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$ de tal forma que ω_0 é o círculo unitário. O círculo ω_{AB} tem centro $O_{AB} = (1, 1)$ e raio 1 donde temos $M = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Seja $O_{DM} = (x, -1)$ o centro de ω_{DM} : temos

$$x^2 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \implies x = 3.$$

Um vetor normal a ω_{AB} em M é

$$v_0 = M - O_{AB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad |v_0| = 1.$$

Um vetor normal a ω_{DM} em M é

$$v_1 = M - O_{DM} = \left(-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad |v_1| = 3.$$

Vamos calcular o produto interno entre v_0 e v_1 :

$$\langle v_0, v_1 \rangle = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.$$

Como $\langle v_0, v_1 \rangle = |v_0| |v_1| \cos \theta$ segue que $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

3. (1,5 ponto)

No espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) , considere os infinitos planos de equações $x = i$, $y = j$, $z = k$ onde $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Observe que estes planos decompõem o espaço em cubos unitários cujos vértices têm coordenadas inteiras: chamamos estes cubos de *cubos unitários inteiros*. Mais precisamente, um cubo unitário inteiro tem a forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1, k \leq z \leq k+1\} = [i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1], \quad i, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Considere também a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ e a bola fechada definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 7$.

- (a) Quantos cubos unitários inteiros estão contidos na bola fechada acima?
- (b) Quantos cubos unitários inteiros são cortados por esta esfera?
(Dizemos que um cubo é cortado pela esfera quando ele tem pelo menos um ponto na bola aberta $x^2 + y^2 + z^2 < 7$ mas não está contido na bola fechada.)

Solução:

O problema é simétrico em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Basta portanto contar os cubos no primeiro oitante ($x, y, z \geq 0$) e multiplicar a resposta obtida por 8. A partir de agora consideramos portanto cubos $C(i, j, k) = [i, i+1] \times [j, j+1] \times [k, k+1]$ com $i, j, k \in \mathbb{N}$ (note que $0 \in \mathbb{N}$).

O cubo $C(i, j, k)$ está contido na bola fechada se e somente se $(i+1)^2 + (j+1)^2 + (k+1)^2 \leq 7$. Temos portanto quatro cubos no primeiro oitante:

$$C(0, 0, 0), C(1, 0, 0), C(0, 1, 0), C(0, 0, 1).$$

A resposta do primeiro item é portanto que há exatamente 32 cubos unitários inteiros contidos na bola fechada.

O cubo $C(i, j, k)$ corta a esfera se e somente se não estiver contido mas valer $i^2 + j^2 + k^2 \leq 7$. Temos portanto no primeiro oitante os seguintes 16 cubos:

$$\begin{aligned} &C(1, 1, 0), C(1, 0, 1), C(0, 1, 1), C(1, 1, 1), \\ &C(2, 0, 0), C(0, 2, 0), C(0, 0, 2), \\ &C(2, 1, 0), C(2, 0, 1), C(1, 2, 0), C(0, 2, 1), C(1, 0, 2), C(0, 1, 2), \\ &C(2, 1, 1), C(1, 2, 1), C(1, 1, 2). \end{aligned}$$

A resposta do segundo item é portanto que há exatamente 128 cubos unitários inteiros cortados pela esfera.

4. (1,5 ponto)

Sejam $p_1 = 24000001$ e $p_2 = 30000001$; sabemos que ambos são primos.

Seja $N = p_1 p_2$.

- (a) Para quantos inteiros a , $0 < a < N$, temos $\text{mdc}(a, N) = 1$?
- (b) Para quantos inteiros b , $0 < b < N$, temos que $b^2 + 1$ é múltiplo de N ?
- (c) Dado um inteiro a com $0 < a < N$ e $\text{mdc}(a, N) = 1$, seja $m = \text{ord}_N(a)$ o menor inteiro positivo para o qual $a^m - 1$ é múltiplo de N . Para quantos valores de a temos que m é ímpar?
- (d) Seja a inteiro com $0 < a < N$ e $\text{mdc}(a, N) = 1$ e seja $m = \text{ord}_N(a)$ definido como no item anterior. Para quantos valores de a temos que m é par e que $a^{(m/2)} + 1$ é múltiplo de N ?

(Obs: contas simples mas trabalhosas podem ser deixadas indicadas.)

Solução:

- (a) Temos (função de Euler)

$$\phi(N) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) = 24000000 \cdot 30000000.$$

(b) Queremos resolver a congruência $x^2 \equiv -1 \pmod{N}$, o que pelo Teorema Chinês do Resto equivale a resolver independentemente as congruências $x_1^2 \equiv -1 \pmod{p_1}$ e $x_2^2 \equiv -1 \pmod{p_2}$. Como $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, cada uma destas últimas duas congruências tem exatamente 2 soluções. Assim, a congruência original tem exatamente 4 soluções.

(c) Seja $\mathbb{Z}/(k)$ o grupo aditivo dos inteiros módulo k ; seja $(\mathbb{Z}/(k))^\times$ o grupo multiplicativo módulo k . Pelo Teorema Chinês do Resto temos

$$(\mathbb{Z}/(N))^\times = (\mathbb{Z}/(p_1))^\times \oplus (\mathbb{Z}/(p_2))^\times.$$

Pela existência de raízes primitivas, temos

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}/(p_1))^\times &\approx \mathbb{Z}/(p_1 - 1) = \mathbb{Z}/(2^9) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(5^6); \\ (\mathbb{Z}/(p_2))^\times &\approx \mathbb{Z}/(p_2 - 1) = \mathbb{Z}/(2^7) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(5^7).\end{aligned}$$

Assim $(\mathbb{Z}/(N))^\times \approx G_0 \oplus G_1$ onde

$$G_0 = \mathbb{Z}/(2^9) \oplus \mathbb{Z}/(2^7), \quad G_1 = \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(5^6) \oplus \mathbb{Z}/(5^7).$$

Um elemento a tem ordem ímpar se e somente se pertence a G_1 . Assim, o número de elementos de ordem ímpar é igual a $3^2 \cdot 5^{13}$.

(d) Novamente usamos o isomorfismo

$$(\mathbb{Z}/(N))^\times \approx \mathbb{Z}/(2^9) \oplus \mathbb{Z}/(2^7) \oplus G_1,$$

definido no item anterior. Note que -1 é levado em $(2^8, 2^6, 0)$. Quando elevamos a à parte ímpar da ordem garantimos que a última coordenada (em G_1) é igual a 0. Basta portanto resolver o problema em $G_0 = \mathbb{Z}/(2^9) \oplus \mathbb{Z}/(2^7)$; lembre que o isomorfismo transforma produto em soma.

Temos em G_0 um único elemento de ordem 2 igual a $c = (2^8, 2^6)$. Temos exatamente quatro elementos de ordem 4 que multiplicados por 2 dão c :

$$(2^7, 2^5), (3 \cdot 2^7, 2^5), (2^7, 3 \cdot 2^5), (3 \cdot 2^7, 3 \cdot 2^5).$$

Temos exatamente $16 = 4^2$ elementos de ordem $8 = 2^3$ que multiplicados por 4 = 2^2 dão c :

$$(u \cdot 2^6, v \cdot 2^4), \quad u, v \in \{1, 3, 5, 7\}.$$

Analogamente, para cada $k \leq 6$, temos 4^k elementos de ordem 2^{k+1} que multiplicados por 2^k dão c :

$$(u \cdot 2^{(8-k)}, v \cdot 2^{(6-k)}), \quad u, v \in \{1, 3, \dots, 2^{(k+1)} - 1\}.$$

Assim, o número desejado de elementos é

$$3^2 \cdot 5^{13} \cdot (1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6) = 3 \cdot 5^{13} \cdot (2^{14} - 1).$$

5. (2,0 ponto)

Rosencrantz e Guildenstern gostam de jogar cara ou coroa. Rosencrantz sempre aposta em **cara** e Guildenstern sempre aposta em **coroa**. Eles gostam de inventar novas maneiras de jogar.

A última maneira que eles inventaram usa uma moeda comum. Eles combinam um número inteiro positivo N e jogam a moeda várias vezes contando as ocorrências até que tenham saído exatamente N **caras**. Cada **coroa** vale um ponto para Guildenstern e cada **cara** vale um ponto para Rosencrantz. Quando o jogo termina, quem tiver tirado menos pontos deve pagar para o vencedor uma moeda por cada ponto de diferença.

Por exemplo, sábado de manhã eles combinaram $N = 5$ e obtiveram os seguintes resultados (com **H** para **cara** e **T** para **coroa**):

HTHTHHH

e com isso o jogo acabou com um placar de 5 a 2 e Guildenstern pagou três moedas a Rosencrantz.

Em função de N , responda:

- (a) Qual é a probabilidade de que haja empate (ou seja, uma placar de N a N)?
- (b) Qual é o placar final mais provável?
(Se houver mais de um placar final com igual probabilidade máxima indique quais são estes placares.)
- (c) Qual é a probabilidade de que Rosencrantz ganhe (por qualquer placar)?

Solução:

(a) Um placar de N a k corresponde a uma sequência de N **H** e de k **T** onde a última letra é obrigatoriamente um **H**. Cada sequência tem probabilidade $2^{-(N+k)}$ de ocorrer. Assim, devemos escolher um subconjunto de k elementos dentre as $N + k - 1$ primeiras posições (para serem os **T**). A probabilidade de um placar de N a k é portanto

$$P_{N,k} = \binom{N+k-1}{k} 2^{-(N+k)} = \frac{(N+k-1)!}{k!(N-1)!2^{(N+k)}}.$$

Em particular, a probabilidade de um empate é

$$P_{N,N} = \binom{2N-1}{N} 2^{-2N}.$$

(b) Usando a expressão acima e simplificando, temos

$$\frac{P_{N,k+1}}{P_{N,k}} = \frac{N+k}{2(k+1)}$$

donde

$$P_{N,k+1} < P_{N,k} \iff N+k < 2(k+1) \iff N-2 < k;$$

equivalências semelhantes valem para $>$ ou para $\leq$. Assim, fixando N e variando k , $P_{N,k}$ cresce até $k = N-2$, temos $P_{N,N-2} = P_{N,N-1}$ e depois $P_{N,k}$ decresce. Assim, para N fixo os dois placares mais prováveis são $(N-2)$ a N e $(N-1)$ a N ; estes dois têm igual probabilidade.

(c) Considere a seguinte variação. Rosencrantz e Guildenstern jogam cara ou coroa até o primeiro deles conseguir N pontos; neste momento, este primeiro é declarado o vencedor. Nesta variação o jogo não admite empate e a probabilidade de cada um ganhar é igual a $\frac{1}{2}$, por simetria.

No jogo proposto no enunciado, se só estamos interessados em determinar se Rosencrantz ganha, podemos interromper a partida quando o primeiro dos dois conseguir N pontos. Reduzimos portanto o jogo à variação acima. Assim a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{2}$.

Esboço de outra solução: Seja R_N a probabilidade de que Rosencrantz ganhe. Temos

$$R_N = \sum_{0 \leq k < N} P_{N,k} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} 2^{(-N-k)}.$$

É fácil verificar (por contas) que $R_N = \frac{1}{2}$ para $N \leq 3$. Podemos usar estes primeiros casos como base para uma prova por indução de que $R_N = \frac{1}{2}$ para todo N .

6. (2,0 ponto)

Seja n um inteiro positivo. Consideramos linhas poligonais P de vértices

$$(0, 0), (1, x_1), \dots, (n, x_n), (n+1, 0); \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}.$$

Escrevemos $P = [x_1, \dots, x_n]$ e convencionamos que $x_0 = x_{n+1} = 0$. Assim, por exemplo, para $n = 3$ a poligonal $P = [3, 4, 3]$ tem vértices $(0, 0), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 0)$, nesta ordem.

Podemos passar de uma linha poligonal $P = [x_1, \dots, x_n]$ para uma linha poligonal $Q = [y_1, \dots, y_n]$, indicado por $P \rightarrow Q$, se existir $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

- $x_j = y_j$ para todo $j \neq k$;
- $2x_k > x_{k-1} + x_{k+1}$;
- $y_k = x_{k-1} - x_k + x_{k+1} + 1$.

Assim, por exemplo, para $n = 3$ temos

$$[3, 4, 3] \rightarrow [2, 4, 3] \rightarrow [2, 2, 3] \rightarrow [1, 2, 3] \rightarrow [1, 2, 0] \rightarrow [1, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0].$$



Escrevemos $P \Rightarrow Q$ se existe um inteiro positivo k e poligonais $P = Q_k, Q_{k-1}, \dots, Q_1, Q_0 = Q$ tais que

$$Q_k \rightarrow Q_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0.$$

Assim, por exemplo, vimos acima que $[3, 4, 3] \Rightarrow [0, 0, 0]$.

- (a) Em função de n , determine quantas poligonais P satisfazem $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$.
- (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, com justificativa.
Se $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$, $Q \Rightarrow [0, \dots, 0]$ e a poligonal P está sempre acima da poligonal Q (exceto pelos extremos $(0, 0)$ e $(n+1, 0)$) então $P \Rightarrow Q$.

Solução:

Estabelecemos uma bijeção entre poligonais $P = [x_1, \dots, x_n]$ e funções $\pi : \{1, 2, \dots, n, n+1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$\pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(n) + \pi(n+1) = 1 + 2 + \dots + n + (n+1).$$

Dada a função π , definimos

$$x_k = (\pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(k)) - (1 + 2 + \dots + k);$$

dada a poligonal P , definimos

$$\pi(k) = x_k - x_{k-1} + k.$$

Observe que $P = [0, \dots, 0]$ corresponde à função identidade $\pi(k) = k$. Observe também que

$$\pi(k+1) - \pi(k) = x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} + 1.$$

Sejam P e Q poligonais correspondentes a π_0 e π_1 , respectivamente. Temos $P \rightarrow Q$ (na posição k) se e somente se

$$\pi_0(k) > \pi_0(k+1), \quad \pi_1(k) = \pi_0(k+1), \quad \pi_1(k+1) = \pi_0(k)$$

de tal forma que temos $\pi_0 = \pi_1 \circ a_k$ onde a_k é a transposição

$$a_k(j) = \begin{cases} k+1, & j = k, \\ k, & j = k+1, \\ j, & j \neq k, k+1. \end{cases}$$

Assim, se P corresponde a π e $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$ então π é uma permutação diferente da identidade. Reciprocamente, se π é uma permutação diferente da identidade com j inversões então $P \Rightarrow [0, \dots, 0]$; o número de passos k será igual ao número de inversões j . Assim, o número pedido de poligonais no item (a) é $(n+1)! - 1$.

A afirmação no item (b) é falsa. Um contra-exemplo é $n = 3$, $P = [1, 2, 3]$ e $Q = [0, 0, 1]$. Temos

$$[1, 2, 3] \rightarrow [1, 2, 0] \rightarrow [1, 0, 0] \rightarrow [0, 0, 0]; \quad [0, 0, 1] \rightarrow [0, 0, 0]$$

mas estas jogadas são únicas, logo $[1, 2, 3] \not\rightarrow [0, 0, 1]$.