

PUC-Rio
Desafio em Matemática
30 de setembro de 2018

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,5		
2	1,5		
3	1,5		
4	1,5		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

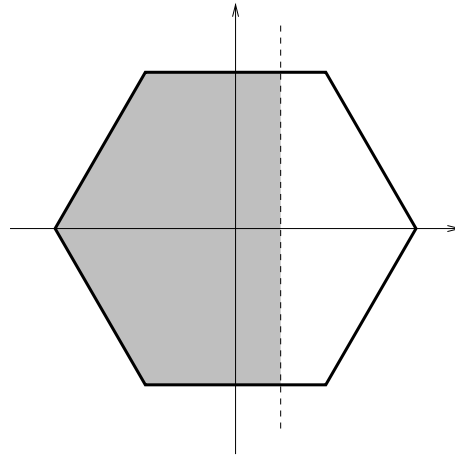
Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,5 ponto)** Considere o hexágono regular $H \subset \mathbb{R}^2$, centrado na origem e tal que o ponto $(1, 0)$ seja um de seus vértices. Defina a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $h(x_0)$ é a área do conjunto

$$\{(x, y) \in H \mid x \leq x_0\},$$

ou seja, a parte do hexágono H à esquerda da reta vertical $x = x_0$.



- (a) Calcule $h(-1)$, $h(-\frac{1}{2})$, $h(0)$, $h(\frac{1}{2})$ e $h(1)$.
- (b) Escreva uma fórmula simples para $h(x)$; divida em casos se conveniente.

2. **(1,5 ponto)** Encontre todas as soluções reais das equações abaixo:

(a)

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

(b)

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$

(c)

$$x = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

3. (1,5 ponto)

- (a) Encontre um polinômio $P_6(x)$ (de coeficientes reais) tal que $P_6(\cos(t)) = \cos(6t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Para cada número real a , determine o número de raízes reais da equação $P_6(x) = a$, indicando raízes múltiplas e suas multiplicidades, quando houver. Divida em casos se necessário.

4. **(1,5 ponto)** Defina recursivamente a função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ por

$$f(1) = 1, \quad f(n+1) = n + 2^{f(n)};$$

assim por exemplo $f(2) = 3$ e $f(3) = 10$ e $f(4) = 1027$.

Determine os dois últimos algarismos de $f(2018)$, ou seja, determine $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < 100$ tal que exista $k \in \mathbb{N}$ com $f(2018) = 100k + a$.

Justifique sua resposta.

5. **(2,0 ponto)** Em uma parte do espaço há N planetas esféricos. Em um certo instante, vale a propriedade de que para cada planeta há um ponto em sua superfície a partir do qual todos os demais $N - 1$ planetas são visíveis no céu.
- (a) Prove que para todo planeta e para todo inteiro k , $0 \leq k < N$, existe um ponto na superfície do planeta a partir do qual exatamente k dentre os demais planetas são visíveis.
 - (b) Numere os planetas de 1 a N . Dado um ponto q na superfície do planeta N seja $X_q \subseteq \{1, \dots, N - 1\}$ o conjunto dos p tais que o planeta p é visível a partir do ponto q . Um conjunto $X \subseteq \{1, \dots, N - 1\}$ é *visível* (para nossa configuração) se existe um ponto q na superfície do planeta N tal que $X = X_q$. Quantos conjuntos visíveis existem?

Neste problema você pode supor que não existem três planetas em linha reta nem quatro planetas em um plano. Considere que os raios dos planetas são muito menores do que as distâncias entre planetas.

6. **(2,0 ponto)** André, Bianca e Claire jogam um jogo com as seguintes regras. Primeiro André escolhe e anuncia um número inteiro n_A entre 1 e 100. Depois disso Bianca escolhe e anuncia outro número inteiro $n_B \neq n_A$ entre 1 e 100. Depois disso Claire escolhe e anuncia um terceiro número inteiro $n_C \notin \{n_A, n_B\}$, também entre 1 e 100.

Finalmente os jogadores sorteiam um número n_X entre 1 e 100. Cada número tem probabilidade $\frac{1}{100}$ de ser sorteado e cada sorteio é independente de tudo o que aconteceu antes. Ganha quem tiver falado o número mais próximo de n_X . Em caso de empate entre dois jogadores, o vencedor é definido por cara ou coroa.

Na primeira partida, André escolhe $n_A = 50$, Bianca escolhe $n_B = 49$ e Claire escolhe $n_C = 51$. Neste momento André percebe que sua probabilidade de ganhar é igual a apenas $p_A = \frac{1}{100}$; as probabilidades de vitória de Bianca e Claire são $p_B = \frac{49}{100}$ e $p_C = \frac{1}{2}$. André decide nunca mais começar uma partida desta forma.

Claire anuncia que ela sempre escolherá n_C de forma a maximizar p_C ; se houver mais de um valor de n_C que realize o máximo, n_C será escolhido ao acaso entre esses valores, com igual probabilidade para cada valor.

- Na segunda partida, André escolhe $n_A = 40$. Bianca naturalmente deseja maximizar a sua probabilidade de vitória p_B . Levando em conta a estratégia de Claire, como Bianca deve escolher n_B ? Qual será a resposta de Claire? Quais serão as probabilidades de vitória p_A , p_B e p_C ?
- Na terceira partida, André escolhe $n_A = 20$. Como Bianca deve escolher n_B ? Qual será a resposta de Claire, e quais serão os valores de p_A , p_B e p_C ?
- Na quarta partida, André já teve mais tempo para pensar. Ele percebe que Bianca, que conhece a estratégia de Claire, escolhe n_B , levando isso em conta, de tal forma a maximizar p_B . Sendo assim, como André deve escolher n_A ? Quais serão as respostas de Bianca e Claire? Quais serão as probabilidades de vitória de cada jogador?

Solução:

Vamos primeiro determinar as probabilidades de vitória em função dos números $n_1 < n_2 < n_3$. Se $n_1 + n_2$ é ímpar, o jogador 1 ganha se $n_X \leq \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$, com probabilidade $p_1 = \frac{n_1 + n_2 - 1}{200}$. Se $n_1 + n_2$ é par, o jogador 1 ganha se $n_X \leq \frac{n_1 + n_2}{2}$ e ainda tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ganhar se $n_X = \frac{n_1 + n_2}{2}$; assim também neste caso vale a fórmula acima para p_1 . O cálculo de p_3 é análogo e temos portanto:

$$p_1 = \frac{n_1 + n_2 - 1}{200}, \quad p_2 = \frac{n_3 - n_1}{200}, \quad p_3 = \frac{201 - n_2 - n_3}{200}.$$

Vamos agora estudar a estratégia de Claire. Podemos supor que André e Bianca jogaram $n_u < n_v$ (em alguma ordem). Se Claire joga $n_C < n_u$, ela não tem nenhum motivo para não jogar $n_C = n_u - 1$ e neste caso vale $p_C = \frac{n_u-1}{100}$. Analogamente, Claire pode jogar $n_C = n_v + 1$ e neste caso $p_C = \frac{100-n_v}{100}$. Finalmente, se Claire jogar n_C com $n_u < n_C < n_v$ temos $p_C = \frac{n_v-n_u}{200}$; observe que neste caso todas as jogadas de Claire neste intervalo são igualmente boas para ela. Assim Claire decidirá jogar no início, no meio ou no fim de acordo com qual for o maior dentre estes três números.

No item (a), se Bianca jogar $n_B = 62$, Claire responderá com $n_C = 39$ e teremos $p_B = \frac{49}{100}$: esta é a melhor jogada para Bianca. De fato, se Bianca jogar $n_B = 39$, Claire responderá $n_C = 41$ e teremos $p_B = \frac{39}{100}$. A situação com $n_B < 39$ é análoga mas mais desfavorável a Bianca. Se Bianca jogar $n_B \in [41, 60]$, Claire responderá com $n_C = n_B + 1$ e teremos valores de p_B também menores. Se Bianca jogar $n_B = 61$, Claire sorteará (com probabilidade $\frac{1}{2}$) entre $n_C = 39$ e $n_C = 62$, o que significa que devemos fazer a média entre os dois valores de p_B e portanto é desfavorável a Bianca.

No item (b), se Bianca jogar $n_B \in [0, 19]$, Claire responderá com $n_C = 21$ e teremos $p_B = \frac{19+n_B}{200}$. Se Bianca jogar $n_B \in [21, 73]$, Claire responderá com $n_C = n_B + 1$ e teremos $p_B = \frac{n_B-19}{200}$. Se Bianca jogar $n_B \in [74, 100]$, Claire responderá com um elemento aleatório de $[21, n_B - 1]$; o valor médio é $p_B = \frac{400-3n_B}{400}$. A melhor jogada para Bianca é portanto $n_B = 74$. A probabilidade de vitória de Claire é $p_C = \frac{54}{200} = \frac{27}{100}$. Antes da jogada de Claire, as probabilidades de vitória de André e Bianca são $p_A = \frac{57}{200}$ e $p_B = \frac{89}{200}$.

