

PUC-Rio
Desafio em Matemática
29 de setembro de 2019

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

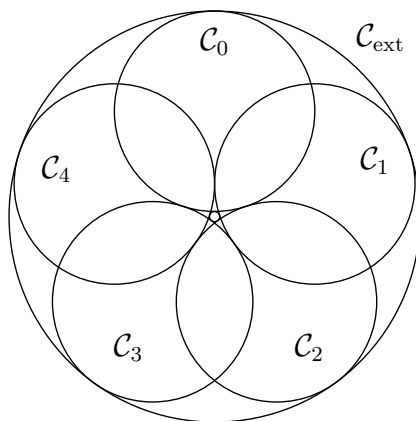
Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,5		
2	1,5		
3	1,5		
4	1,5		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,5 ponto)** Seja $P(x) = 2x^2 - 1$.
- (a) Encontre todas as soluções reais de $P(x) = x$.
Quantas soluções complexas existem?
 - (b) Encontre todas as soluções reais de $P(P(x)) = x$.
Quantas soluções complexas existem?
 - (c) Quantas soluções reais tem a equação $P(P(P(x))) = x$?
Quantas soluções complexas existem?
Quantas soluções reais estão no intervalo aberto $(0, 1)$?

2. **(1,5 ponto)** Dentro de um círculo $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ de raio $R = 1$ temos um círculo concêntrico $\mathcal{C}_{\text{int}}$ de raio $r_{\text{int}} < 1$. Temos também 5 círculos $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_4$ de raio $r_1 < 1$, como na figura (o círculo $\mathcal{C}_{\text{int}}$ é bem pequeno, no centro da figura).



Denotamos $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_1$ e assim por diante de tal forma que $\mathcal{C}_{5+k} = \mathcal{C}_k$. Cada círculo $\mathcal{C}_k$ é interior e tangente a $\mathcal{C}_{\text{ext}}$, exterior e tangente a $\mathcal{C}_{\text{int}}$, $\mathcal{C}_{k+2}$ e $\mathcal{C}_{k-2}$. Além disso, cada círculo $\mathcal{C}_k$ cruza os círculos $\mathcal{C}_{k+1}$ e $\mathcal{C}_{k-1}$.

Determine os valores de r_{int} e de r_1 . Simplifique sua resposta.

3. (1,5 ponto)

Jorge joga uma moeda comum e anota os resultados sequencialmente, com **H** para **cara** e **T** para **coroa**. Depois ele usa colchetes para juntar blocos de resultados iguais. Assim, por exemplo, ao jogar a moeda 10 vezes sábado de manhã ele obteve como resultado

$$[\mathbf{H}][\mathbf{T}][\mathbf{H}][\mathbf{T}][\mathbf{HHHH}][\mathbf{TT}],$$

com 6 blocos, sendo o maior de comprimento 4.

Depois do almoço ele repete o processo jogando a moeda n vezes.

- (a) Qual é o número de blocos mais provável de ocorrer?
Qual é a probabilidade de que ocorra exatamente este número de blocos?
- (b) Qual é a probabilidade de que o maior bloco tenha tamanho 1?
- (c) Qual é a probabilidade de que o maior bloco tenha tamanho 2?

Suas respostas devem ser dadas em função de n ; simplifique.

4. **(1,5 ponto)** Seja $\theta = 2\pi/13$. Sejam

$$\alpha_1 = 2 \cos(\theta) + 2 \cos(5\theta),$$

$$\alpha_2 = 2 \cos(2\theta) + 2 \cos(3\theta),$$

$$\alpha_3 = 2 \cos(4\theta) + 2 \cos(6\theta).$$

- (a) Encontre um polinômio não nulo P de grau 3 com raízes α_1 , α_2 e α_3 . Simplifique.
- (b) Encontre um polinômio Q de grau menor ou igual a 2 satisfazendo $Q(\alpha_1) = \alpha_2$, $Q(\alpha_2) = \alpha_3$, $Q(\alpha_3) = \alpha_1$. Simplifique.

5. **(2,0 ponto)** Seja $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_0(t) = \frac{1}{2} (|t-1| - 2|t| + |t+1|).$$

Defina recursivamente funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, por

$$f_{n+1}(t) = f_0(t) + \frac{1}{2}f_n(4t-6) + \frac{1}{2}f_n(4t+6).$$

- (a) Esboce os gráficos de f_0 , f_1 e f_2 .
(b) Diga se existe $C_1 > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ valha

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq C_1 |t_1 - t_0|.$$

Justifique. (Note que C_1 não deve depender de n , t_0 ou t_1 .)

- (c) Diga se existe $C_2 > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ valha

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq C_2 \sqrt{|t_1 - t_0|}.$$

Justifique.

6. **(2,0 ponto)** Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g(n+2) = 2g(n+1) + g(n).$$

Assim temos, por exemplo,

$$g(2) = 2, \quad g(3) = 5, \quad g(4) = 12, \quad g(5) = 29, \quad g(6) = 70, \quad g(7) = 169.$$

(a) Encontre o último algarismo de $g(2020)$. Justifique.

(b) Seja $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = g(1 + h(n)).$$

Assim temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} h(1) &= g(1+0) = 1, & h(2) &= g(1+1) = 2, \\ h(3) &= g(1+2) = 5, & h(4) &= g(1+5) = 70, \\ h(5) &= g(1+70) = 531531081917181734003902441. \end{aligned}$$

Encontre o último algarismo de $h(2020)$. Justifique.

