

PUC-Rio  
Desafio em Matemática  
29 de setembro de 2019

Nome: \_\_\_\_\_ Inscrição: \_\_\_\_\_  
Assinatura: \_\_\_\_\_ Identidade: \_\_\_\_\_

| Questão    | Valor | Nota | Revisão |
|------------|-------|------|---------|
| 1          | 1,5   |      |         |
| 2          | 1,5   |      |         |
| 3          | 1,5   |      |         |
| 4          | 1,5   |      |         |
| 5          | 2,0   |      |         |
| 6          | 2,0   |      |         |
| Nota final | 10,0  |      |         |

## Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.  
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.  
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.  
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.  
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.  
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.  
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.  
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,5 ponto)** Seja  $P(x) = 2x^2 - 1$ .
- (a) Encontre todas as soluções reais de  $P(x) = x$ .  
Quantas soluções complexas existem?
  - (b) Encontre todas as soluções reais de  $P(P(x)) = x$ .  
Quantas soluções complexas existem?
  - (c) Quantas soluções reais tem a equação  $P(P(P(x))) = x$ ?  
Quantas soluções complexas existem?  
Quantas soluções reais estão no intervalo aberto  $(0, 1)$ ?

### Solução:

Para o item (a) basta resolver a equação  $2x^2 - 1 = x$  que tem raízes  $x_0 = 1$  e  $x_1 = -\frac{1}{2}$ , ambas reais. Como o polinômio tem grau 2, não há raízes em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Para o item (b), expandimos

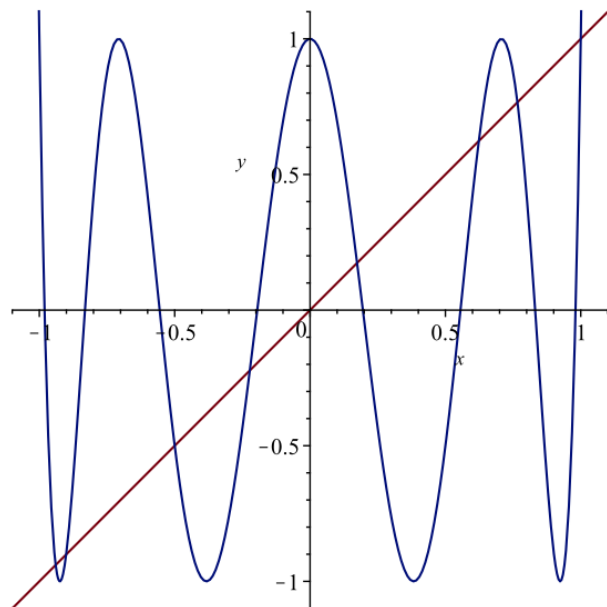
$P(P(x)) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ . Assim,  $P(P(x)) = x$  se e somente se  $x$  é raiz de  $8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$ . Note que  $x_0 = 1$  e  $x_1 = -\frac{1}{2}$  são raízes deste polinômio pois  $P(x) = x$  implica  $P(P(x)) = x$ . Podemos portanto dividir  $8x^4 - 8x^2 - x + 1$  por  $2x^2 - x - 1$  obtendo  $4x^2 + 2x - 1$ , que tem raízes  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  e  $x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ , ambas reais. Como o polinômio tem grau 4, não há raízes em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Para o item (c), observe que o gráfico do polinômio  $P$  é uma parábola passando pelos pontos  $(-1, 1)$ ,  $(0, -1)$  e  $(1, 1)$ : o ponto  $(0, -1)$  é o vértice da parábola. Assim a função  $P$  leva o intervalo  $[0, 1]$  bijetivamente no intervalo  $[-1, 1]$  e também leva o intervalo  $[-1, 0]$  bijetivamente no intervalo  $[-1, 1]$ .

Sejam  $z_- \in (-1, 0)$  e  $z_+ \in (0, 1)$  as soluções de  $P(z) = 0$  (é fácil mas desnecessário calcular  $z_{\pm}$ ). A composta  $T_4 = P \circ P$  leva portanto cada um dos quatro intervalos  $[-1, z_-]$ ,  $[z_-, 0]$ ,  $[0, z_+]$  e  $[z_+, 1]$  bijetivamente em  $[0, 1]$ ; temos  $T_4(-1) = T_4(0) = T_4(1) = 1$  e  $T_4(z_-) = T_4(z_+) = -1$ .

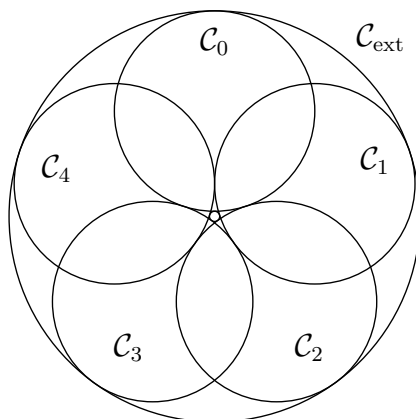
Sejam  $z_{-,-} \in (-1, z_-)$ ,  $z_{-,+} \in (z_-, 0)$ ,  $z_{+,-} \in (0, z_+)$  e  $z_{+,+} \in (z_+, 1)$  as soluções de  $T_4(z) = 0$ . A composta  $T_8 = P \circ P \circ P$  leva portanto cada um dos oito intervalos  $[-1, z_{-,-}]$ ,  $[z_{-,-}, z_{-,+}]$ ,  $[z_{-,+}, z_{+,-}]$ ,  $[z_{+,-}, 0]$ ,  $[0, z_{+,+}]$ ,  $[z_{+,+}, z_{+,-}]$ ,  $[z_{+,-}, z_{+,-}]$  e  $[z_{+,-}, 1]$  bijetivamente em  $[0, 1]$ ; temos  $T_8(-1) = T_8(z_-) = T_8(0) = T_8(z_+) = T_8(1) = 1$  e  $T_8(z_{-,-}) = T_8(z_{-,+}) = T_8(z_{+,-}) = T_8(z_{+,+}) = -1$ .

Assim a reta diagonal  $y = x$  cruza o gráfico de  $y = T_8(x)$  pelo menos oito vezes, uma em cada um dos intervalos acima, conforme mostrado na figura. Como  $T_8$  é um polinômio de grau 8, isto nos dá todas as raízes, todas reais.



Note finalmente que há três raízes de  $T_8(x) = x$  no intervalo  $(0, 1)$ , uma em cada um dos intervalos  $(0, z_{+,-})$ ,  $(z_{+,-}, z_{+})$  e  $(z_{+}, z_{+,+})$ . A raiz no intervalo  $[z_{+,+}, 1]$  é  $x_0 = 1$  e não deve portanto ser contada.

2. **(1,5 ponto)** Dentro de um círculo  $\mathcal{C}_{\text{ext}}$  de raio  $R = 1$  temos um círculo concêntrico  $\mathcal{C}_{\text{int}}$  de raio  $r_{\text{int}} < 1$ . Temos também 5 círculos  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_4$  de raio  $r_1 < 1$ , como na figura (o círculo  $\mathcal{C}_{\text{int}}$  é bem pequeno, no centro da figura).



Denotamos  $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_1$  e assim por diante de tal forma que  $\mathcal{C}_{5+k} = \mathcal{C}_k$ . Cada círculo  $\mathcal{C}_k$  é interior e tangente a  $\mathcal{C}_{\text{ext}}$ , exterior e tangente a  $\mathcal{C}_{\text{int}}$ ,  $\mathcal{C}_{k+2}$  e  $\mathcal{C}_{k-2}$ . Além disso, cada círculo  $\mathcal{C}_k$  cruza os círculos  $\mathcal{C}_{k+1}$  e  $\mathcal{C}_{k-1}$ .

Determine os valores de  $r_{\text{int}}$  e de  $r_1$ . Simplifique sua resposta.

### Solução:

Observe inicialmente que  $r_{\text{int}} + 2r_1 = 1$ : isto pode ser visto traçando um raio de  $\mathcal{C}$  passando pelo centro de  $\mathcal{C}_0$ .

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os centros de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_0$  e  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente. O triângulo  $ABC$  é isósceles em  $A$  com lados  $\overline{AB} = \overline{AC} = r_{\text{int}} + r_1$  e  $\overline{BC} = 2r_1$ . Os ângulos internos são  $\hat{A} = \frac{4\pi}{5}$  e  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{10}$ . Assim

$$\frac{r_1}{r_{\text{int}} + r_1} = \frac{r_1}{1 - r_1} = \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

e portanto

$$r_1 = \frac{\gamma}{1 + \gamma}, \quad r_{\text{int}} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}.$$

Como  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$  temos

$$\gamma = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

e portanto

$$r_1 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}, \quad r_{\text{int}} = \frac{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

3. (1,5 ponto)

Jorge joga uma moeda comum e anota os sequencialmente os resultados, com **H** para **cara** e **T** para **coroa**. Depois ele usa colchetes para juntar blocos de resultados iguais. Assim, por exemplo, ao jogar a moeda 10 vezes sábado de manhã ele obteve como resultado

$$[\mathbf{H}][\mathbf{T}][\mathbf{H}][\mathbf{T}][\mathbf{HHHH}][\mathbf{TT}],$$

com 6 blocos, sendo o maior de comprimento 4.

Depois do almoço ele repete o processo jogando a moeda  $n$  vezes.

- (a) Qual é o número de blocos mais provável de ocorrer?  
Qual é a probabilidade de que ocorra exatamente este número de blocos?
- (b) Qual é a probabilidade de que o maior bloco tenha tamanho 1?
- (c) Qual é a probabilidade de que o maior bloco tenha tamanho 2?

Suas respostas devem ser dadas em função de  $n$ ; simplifique.

**Solução:**

Para o item (a), seja  $p_{n,k}$  a probabilidade de obtermos  $k$  blocos ao fazermos  $n$  lançamentos, onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $1 \leq k \leq n$ . Afirmamos que

$$p_{n,k} = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1};$$

demonstraremos este fato por indução. O caso  $n = 1$  é trivial (sempre temos um bloco) e o caso  $n = 2$  é fácil (temos 1 bloco com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e 2 blocos com probabilidade  $\frac{1}{2}$ : basta ver se o segundo lançamento é igual ou diferente do primeiro).

Para o passo de indução, observe que para termos  $k$  blocos com  $n$  lançamentos devemos ter ou  $k$  ou  $k - 1$  blocos com  $n - 1$  lançamentos. Se tivermos  $k$  blocos com  $n - 1$  lançamentos temos  $\frac{1}{2}$  de probabilidade de ainda termos  $k$  blocos com  $n$  lançamentos (basta que o  $n$ -ésimo lançamento seja igual ao anterior). Analogamente, se tivermos  $k - 1$  blocos com  $n - 1$  lançamentos também temos  $\frac{1}{2}$  de probabilidade de termos  $k$  blocos com  $n$  lançamentos (basta que o  $n$ -ésimo lançamento seja diferente do anterior). Assim

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{1}{2}(p_{n-1,k-1} + p_{n-1,k}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-2}} \left( \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}, \end{aligned}$$

como queríamos.

Assim, se  $n$  é ímpar o número mais provável de blocos é  $k = \frac{n-1}{2}$ , com probabilidade  $p_{n,k}$  dada pela fórmula acima. Se  $N$  é par há empate entre  $k = \frac{n}{2} - 1$  e  $k = \frac{n}{2}$ .

Para o item (b), todos os blocos devem ter tamanho 1 logo devemos ter  $k = n$  blocos. Pela fórmula do item anterior, isto ocorre com probabilidade  $\frac{1}{2^{n-1}}$ .

Para o item (c), lembre a função de Fibonacci:

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-1) + F(n-2) = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

onde  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  e  $\bar{\phi} = (1 - \sqrt{5})/2$ . Vamos contar o número  $a_n$  de sequências de **Hs** e **Ts**, de comprimento  $n$  e com maior bloco de tamanho menor ou igual a 2. Afirmamos que  $a_n = 2F(n+1)$ . Novamente provaremos por indução; os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  são fáceis. Para formar uma sequência de comprimento  $n \geq 3$  devemos *ou* tomar uma sequência de comprimento  $n-1$  e acrescentar uma letra diferente da última, criando um novo bloco de tamanho 1, *ou* tomar uma sequência de comprimento  $n-2$  e acrescentar um novo bloco de tamanho 2, usando uma letra diferente da última. Assim  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = 2(F(n) + F(n-1)) = 2F(n+1)$ , completando a demonstração por indução.

Para calcular a probabilidade pedida, devemos excluir as sequências contadas no item (b), donde a probabilidade desejada é

$$p = \frac{1}{2^{n-1}} (F(n+1) - 1).$$

4. (1,5 ponto) Seja  $\theta = 2\pi/13$ . Sejam

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\cos(\theta) + 2\cos(5\theta), \\ \alpha_2 &= 2\cos(2\theta) + 2\cos(3\theta), \\ \alpha_3 &= 2\cos(4\theta) + 2\cos(6\theta).\end{aligned}$$

- (a) Encontre um polinômio não nulo  $P$  de grau 3 com raízes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Simplifique.
- (b) Encontre um polinômio  $Q$  de grau menor ou igual a 2 satisfazendo  $Q(\alpha_1) = \alpha_2$ ,  $Q(\alpha_2) = \alpha_3$ ,  $Q(\alpha_3) = \alpha_1$ . Simplifique.

**Solução:**

Seja  $\zeta = \exp(\theta i) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$  de tal forma que  $\zeta^{13} = 1$  e portanto  $\zeta^{k+13} = \zeta^k$  (para  $k \in \mathbb{Z}$ ). Temos também

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^5 + \zeta^{-5}, \\ \alpha_2 &= \zeta^2 + \zeta^{-2} + \zeta^3 + \zeta^{-3}, \\ \alpha_3 &= \zeta^4 + \zeta^{-4} + \zeta^6 + \zeta^{-6}.\end{aligned}$$

Assim

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sum_{1 \leq k \leq 12} \zeta^k = -1.$$

Temos também

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 &= \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^4 + \zeta^{-4} + \zeta^2 + \zeta^{-2} + \\ &\quad + \zeta^6 + \zeta^{-6} + \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^5 + \zeta^{-5} + \zeta^2 + \zeta^{-2} = \\ &= \alpha_2 - 1.\end{aligned}$$

Analogamente,  $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3 - 1$  e  $\alpha_3\alpha_1 = \alpha_1 - 1$ . Assim

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 3 = -4.$$

Temos também

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (\alpha_2 - 1)\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3 = \alpha_3 - 1 - \alpha_3 = -1.$$

Assim, para  $P$  como no item (a) temos:

$$\begin{aligned}P(X) &= (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \\ &= X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)X - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \\ &= X^3 + X^2 - 4X + 1.\end{aligned}$$

Sabemos que  $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2 - 1$ ,  $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3 - 1$  e  $\alpha_3\alpha_1 = \alpha_1 - 1$ . Podemos reescrever estas identidades como

$$R(\alpha_1) = \alpha_2, \quad R(\alpha_2) = \alpha_3, \quad R(\alpha_3) = \alpha_1, \quad R(X) = \frac{1}{1-X}.$$

Faça a divisão com resto de  $P(X) = X^3 + X^2 - 4X + 1$  por  $X - 1$  para obter

$$P(X) = (X - 1)(X^2 + 2X - 2) - 1$$

e portanto

$$\frac{P(X)}{1-X} = Q(X) - R(X), \quad Q(X) = -X^2 - 2X + 2.$$

Como  $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = P(\alpha_3)$  temos

$$Q(\alpha_1) = \alpha_2, \quad Q(\alpha_2) = \alpha_3, \quad Q(\alpha_3) = \alpha_1,$$

resolvendo o item (b).

5. **(2,0 ponto)** Seja  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_0(t) = \frac{1}{2} (|t-1| - 2|t| + |t+1|).$$

Defina recursivamente funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , por

$$f_{n+1}(t) = f_0(t) + \frac{1}{2}f_n(4t-6) + \frac{1}{2}f_n(4t+6).$$

- (a) Esboce os gráficos de  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$ .
- (b) Diga se existe  $C_1 > 0$  tal que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e para quaisquer  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  valha

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq C_1 |t_1 - t_0|.$$

Justifique. (Note que  $C_1$  não deve depender de  $n$ ,  $t_0$  ou  $t_1$ .)

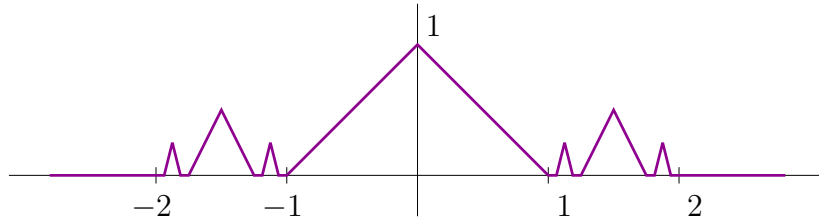
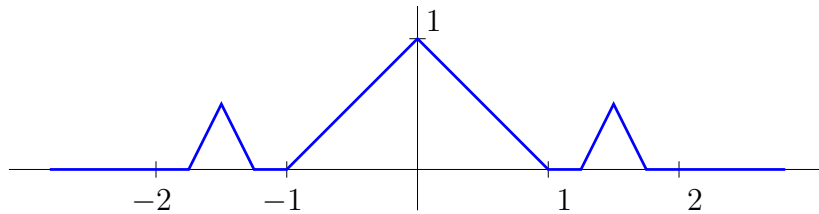
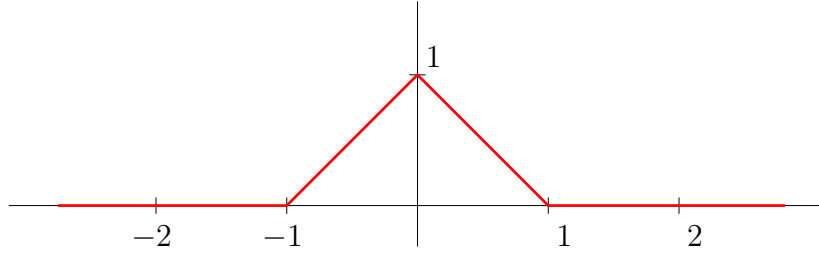
- (c) Diga se existe  $C_2 > 0$  tal que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e para quaisquer  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  valha

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq C_2 \sqrt{|t_1 - t_0|}.$$

Justifique.

### Solução:

Temos abaixo os esboços dos gráficos de  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  (item (a)).



Não existe  $C_1$  como no item (b). De fato, sejam  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ . Defina recursivamente:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 6}{4}.$$

Equivalentemente, os pontos  $(u_n, f_n(u_n))$  e  $(v_n, f_n(v_n))$  são os extremos do último segmento de reta não horizontal no gráfico de  $f_n$ . Assim temos  $v_n - u_n = 4^{-n}$ ,  $f_n(u_n) = 2^{-n}$ ,  $f_n(v_n) = 0$  e  $f_n(v_n) - f_n(u_n) = 2^{-n}$ . Dado um candidato a  $C_1$ , tome  $n$  tal que  $2^n > C_1$ : temos

$$|f_n(v_n) - f_n(u_n)| = 2^n |v_n - u_n| > C_1 |v_n - u_n|,$$

contradizendo a propriedade desejada para  $C_1$ .

Se tomarmos  $C_2 = 1$  temos a propriedade do item (c). Para  $x \geq 0$  temos  $\min\{1, x\} \leq \sqrt{x}$ . Portanto, para  $n = 0$  a propriedade vale pois temos  $|f_0(t_1) - f_0(t_0)| \leq 1$  e  $|f_0(t_1) - f_0(t_0)| \leq |t_1 - t_0|$ . Provaremos agora o resultado geral por indução.

Temos  $f_n|_{[-1,1]} = f_0|_{[-1,1]}$  portanto o resultado segue do caso base se  $t_0, t_1 \in [-1, 1]$ . Considere agora o caso  $t_0, t_1 \in [1, +\infty)$ : temos

$$\begin{aligned} |f_n(t_1) - f_n(t_0)| &= \frac{1}{2} |f_{n-1}(4t_1 - 6) - f_{n-1}(4t_0 - 6)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{|(4t_1 - 6) - (4t_0 - 6)|} = \sqrt{|t_1 - t_0|}; \end{aligned}$$

a desigualdade segue da hipótese de indução. O caso  $t_0, t_1 \in (-\infty, -1]$  é similar.

Falta considerar os casos em que  $t_0, t_1$  não pertencem a um mesmo dentre esses três intervalos. Podemos supor sem perda de generalidade que  $t_0 < t_1$ . Se  $t_0 \leq -1 < 1 \leq t_1$  temos  $|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq 1$  mas  $\sqrt{|t_1 - t_0|} \leq \sqrt{2}$ , donde vale a desigualdade desejada (note que  $f_n(t) \in [0, 1]$  para todo  $n$  e todo  $t$ ). Se  $-1 < t_0 < 1 < t_1$ , dividimos em dois casos:  $f_n(t_0) > f_n(t_1)$  e  $f_n(t_0) < f_n(t_1)$ . Se  $-1 < t_0 < 1 < t_1$  e  $f_n(t_0) > f_n(t_1)$  temos  $f_n(1) = 0$  e portanto

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq |f_n(1) - f_n(t_0)| \leq \sqrt{|1 - t_0|} \leq \sqrt{|t_1 - t_0|},$$

provando a desigualdade desejada neste caso (note que usamos o caso já demonstrado acima para  $\tilde{t}_0 = t_0, \tilde{t}_1 = 1, \tilde{t}_0, \tilde{t}_1 \in [-1, 1]$ ). Se  $-1 < t_0 < 1 < t_1$  e  $f_n(t_0) < f_n(t_1)$  temos

$$|f_n(t_1) - f_n(t_0)| \leq |f_n(t_1) - f_n(1)| \leq \sqrt{|t_1 - 1|} \leq \sqrt{|t_1 - t_0|},$$

novamente provando a desigualdade desejada neste outro caso. Os casos  $t_0 < -1 < t_1 < 1$  são semelhantes, completando a demonstração.

6. **(2,0 ponto)** Seja  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função definida recursivamente por

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g(n+2) = 2g(n+1) + g(n).$$

Assim temos, por exemplo,

$$g(2) = 2, \quad g(3) = 5, \quad g(4) = 12, \quad g(5) = 29, \quad g(6) = 70, \quad g(7) = 169.$$

(a) Encontre o último algarismo de  $g(2020)$ . Justifique.

(b) Seja  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função definida recursivamente por

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = g(1+h(n)).$$

Assim temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} h(1) &= g(1+0) = 1, & h(2) &= g(1+1) = 2, \\ h(3) &= g(1+2) = 5, & h(4) &= g(1+5) = 70, \\ h(5) &= g(1+70) = 531531081917181734003902441. \end{aligned}$$

Encontre o último algarismo de  $h(2020)$ . Justifique.

**Solução:**

Para o item (a), vamos calcular os valores de  $g(k) \bmod 10$ :

|                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $k$             | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $g(k) \bmod 10$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 2 | 9 | 0 | 9 | 8 | 5 | 8  | 1  | 0  | 1  |

Percebemos que  $g(k) \bmod 10$  é periódica com período 12.

Temos  $2020 \equiv 4 \pmod{12}$  e portanto  $g(2020) \equiv g(4) \equiv 2 \pmod{10}$ .

Assim o último algarismo de  $g(2020)$  é 2.

Vamos agora calcular  $g(k) \bmod 8$  e  $g(1+k) \bmod 8$ .

|                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $k$              | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $g(k) \bmod 8$   | 0 | 1 | 2 | 5 | 4 | 5 | 6 | 1 | 0 | 1 | 2  | 5  | 4  |
| $g(1+k) \bmod 8$ | 1 | 2 | 5 | 4 | 5 | 6 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5  | 4  | 5  |

Percebemos que estas funções são periódicas com período 8, ou seja, se conhecemos  $k \bmod 8$  deduzimos  $g(1+k) \bmod 8$ . Isto nos permite calcular  $h(k) \bmod 8$ :

|                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $k$            | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $h(k) \bmod 8$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 6 | 1 | 2 | 5 | 6 | 1 | 2  | 5  | 6  |

Percebemos que  $h(k)$  é eventualmente periódica com período 4. Assim, por exemplo,

$$h(2018) \equiv 2 \pmod{8}, \quad h(2019) \equiv 5 \pmod{8}, \quad h(2020) \equiv 6 \pmod{8}.$$

Vamos agora calcular  $g(k) \bmod 3$  e  $g(k) \bmod 5$ .

| $k$            | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $g(k) \bmod 3$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2  | 2  | 0  | 2  | 1  |
| $g(k) \bmod 5$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 4 | 3 | 0 | 3  | 1  | 0  | 1  | 2  |

Percebemos que  $g(k) \bmod 3$  é periódica com período 8. A partir de  $h(k) \bmod 8$  podemos portanto deduzir  $h(k+1) = g(1+h(k)) \bmod 3$ .

Por exemplo,  $h(2018) \equiv 2 \pmod{8}$  implica  $1+h(2018) \equiv 3 \pmod{8}$  e portanto  $h(2019) = g(1+h(2018)) \equiv 2 \pmod{3}$ .

Como já sabemos que  $h(2019) \equiv 5 \pmod{8}$  temos  $h(2019) \equiv 5 \pmod{12}$ .

Percebemos que  $g(k) \bmod 5$  é periódica com período 12. Assim

$1+h(2019) \equiv 6 \pmod{12}$  implica  $h(2020) = g(1+h(2019)) \equiv 0 \pmod{5}$ .

Como já sabemos que  $h(2020) \equiv 6 \pmod{8}$  temos  $h(2020) \equiv 0 \pmod{10}$ .

Assim, o último algarismo de  $h(2020)$  é 0.