

PUC-Rio
Desafio em Matemática
27 de novembro de 2020

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)** Jorge joga um jogo de paciência usando um baralho com N cartas numeradas de 1 a N ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 10$). Ele inicialmente embaralha bem as cartas. Depois, ele vai tirando cartas uma por uma. Se a carta tiver valor maior do que as anteriores, ele pousa a carta na mesa ao lado das outras (com o número visível). Se a carta tiver valor menor do que alguma carta anterior o jogo termina (e a nova carta não é pousada sobre a mesa).
- (a) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com uma única carta sobre a mesa? Ou seja, qual é a probabilidade de que a segunda carta tenha valor menor do que a primeira?
 - (b) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com exatamente duas cartas sobre a mesa?
 - (c) Qual é a probabilidade de que o jogo termine com exatamente três cartas sobre a mesa?

Solução:

- (a) A probabilidade é $\frac{1}{2}$, porque para cada embaralhamento que começa com ab existe outro que começa com ba e todo o resto é igual, portanto, em exatamente metade dos embaralhamentos temos $b < a$.
- (b) Vamos chamamos de abc as três primeiras cartas que aparecerem no baralho. Sem perda de generalidade, imagine que as três cartas são 1, 2, e 3. Todas as ordens possíveis que elas podem sair (mantendo o resto do embaralhamento igual): 123 132 213 231 312 321, vemos que em três delas o jogo já tinha acabado com uma carta: 213, 312 e 321. Das outras três, apenas 123 o jogo vai continuar, portanto, sobrou $\frac{1}{3}$ de probabilidade de o jogo terminar com exatamente duas cartas.
- (c) Analisando da mesma forma as quatro primeiras cartas do baralho, apenas na forma 1234 o jogo continuaria; nas outras 23 possibilidades ele acabou com no máximo três cartas sobre a mesa. Subtraindo a probabilidade de terminar com menos do que três, temos

$$\frac{23}{24} - \frac{5}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

de chance de terminar com exatamente três cartas.

2. **(1,5 ponto)** Um hexágono convexo é *equiângulo* se todos os ângulos internos são iguais a $2\pi/3$ (ou 120°). Um hexágono convexo e equiângulo é *inscritível* se existir um círculo passando pelos seis vértices.
- (a) Seja $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ um hexágono convexo e equiângulo.
 Seja $\ell_k = |A_{k-1}A_k|$ o comprimento do lado $A_{k-1}A_k$
 (com a convenção $A_6 = A_0$).
 Dados $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$, calcule ℓ_5, ℓ_6 a área S do hexágono.
- (b) Diga se existe um hexágono convexo, equiângulo e inscritível com todos os lados inteiros e área $S = 2020\sqrt{3}$.

Solução:

O hexágono, por causa de seus ângulos, é composto de três pares de arestas paralelas. Imaginando que l_1 e l_4 estejam na horizontal, vemos que apenas as outras 4 contribuem para as posições verticais dos vértices, e o lado esquerdo tem que ter a mesma altura do que o lado direito, ou seja, $l_6 + l_5 = l_2 + l_3$. Fazendo a mesma coisa novamente com o par l_2 e l_5 na horizontal, e depois com o par l_3 e l_6 , encontramos

$$l_5 = l_1 + l_2 - l_4$$

e

$$l_6 = l_4 + l_3 - l_1.$$

Para calcular a área, vamos começar com o retângulo que tem A_0A_1 como parte da sua base de baixo e A_3A_4 como parte da sua base de cima, onde novamente colocamos l_1 e l_4 na horizontal. A altura do retângulo é

$$\frac{l_2\sqrt{3}}{2} + \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$$

e a largura da base tem que ir de A_5 até A_2 , ou seja, ela é

$$l_4 + \frac{l_3}{2} + \frac{l_5}{2}.$$

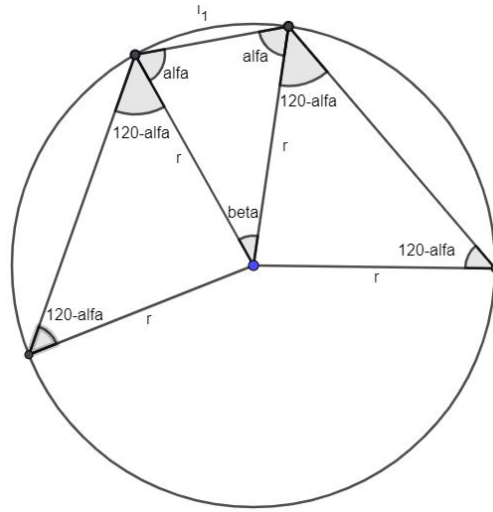
Agora precisamos subtrair 4 triângulos dos cantos deste retângulo. Suas áreas são

$$\frac{l_2^2\sqrt{3}}{8}, \frac{l_3^2\sqrt{3}}{8}, \frac{l_5^2\sqrt{3}}{8}, \frac{l_6^2\sqrt{3}}{8}.$$

Então a área é

$$\begin{aligned} S &= \frac{(l_2 + l_3)\sqrt{3}}{2} \left(l_4 + \frac{l_3}{2} + \frac{l_5}{2} \right) - \frac{(l_2^2 + l_3^2 + l_5^2 + l_6^2)\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} ((l_2 + l_3)(4l_4 + 2l_3 + 2l_5) - (l_2^2 + l_3^2 + l_5^2 + l_6^2)) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (2l_1l_3 + 2l_1l_4 + 2l_2l_3 + 2l_2l_4 - l_1^2 - l_4^2). \end{aligned}$$

Para o hexágono ser inscritível, desenhe o lado l_1 como na figura a seguir, ligando seus vértices ao centro do círculo, formando um triângulo isósceles com ângulos α e β . Os ângulos do hexágono são todos 120° , portanto, aparecem os ângulos $120^\circ - \alpha$ dos dois lados A_1 e A_0 , e estes triângulos também precisam ser isósceles. Assim, em seguida vai aparecer novamente α dos dois lados, terminando a volta no círculo, e mostrando que, se o hexágono é inscritível, temos $l_1 = l_3 = l_5 = a$ e $l_2 = l_4 = l_6 = b$.



Agora, precisamos ver se é possível

$$2020\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2l_1l_3 + 2l_1l_4 + 2l_2l_3 + 2l_2l_4 - l_1^2 - l_4^2)$$

com números inteiros, ou seja,

$$8080 = a^2 + b^2 + 4ab.$$

É fácil ver que não é possível com $a = b$, o que seria um hexágono regular, porque então seria $a = b = \sqrt{\frac{8080}{6}} \sim 36.7$ que não é inteiro. Para $a \neq b$, parecem muitos pares de números para testar, então vamos tentar diminuir a quantidade. Em primeiro lugar, precisamos que a e b sejam ambos pares ou ambos ímpares, para que $a^2 + b^2 + 4ab$ seja par. Vamos fazer uma tabela mostrando o último dígito de $4ab$ para cada par possível:

		a	0	2	4	6	8
		a^2	0	4	6	6	4
b	b^2						
0	0		0	0	0	0	0
2	4		0	6	2	8	4
4	6		0	2	4	6	8
6	6		0	8	6	4	2
8	4		0	4	8	2	6

		a	1	3	5	7	9
		a^2	1	9	5	9	1
b	b^2						
1	1		4	2	0	8	6
3	9		2	6	0	4	8
5	5		0	0	0	0	0
7	9		8	4	0	6	2
9	1		6	8	0	2	4

Examinando os possíveis pares a e b , procurando por casos na tabela em que o último dígito de $a^2 + b^2 + 4ab$ seja zero como o de 8080, vemos que caso sejam números pares ambos precisam terminar em 0, e caso sejam ímpares ambos precisam terminar em 5. Vamos testar se é possível com a e b sendo múltiplos de 5, porque isso engloba os dois casos. Só que neste caso $a^2 + b^2 + 4ab$ é múltiplo de 25, mas 8080 não é. Por isso, concluímos que não é possível um hexágono conforme pedido na questão.

3. **(1,5 ponto)** Para cada uma das identidades abaixo, encontre todos os polinômios reais P que a satisfazem (para todo $x \in \mathbb{R}$).

Justifique sua resposta.

(a) $P(2x) = 4P(x)$.

(b) $P(x+1) - P(x-1) = x^2$.

(c) $P(2x+1) - P(2x-1) = 4(P(x+1) - P(x-1))$.

Solução:

(a) Primeiro, note que $P(x) = ax^2$ funciona, porque $a(2x)^2 = 4ax^2$. Agora precisamos argumentar que não há outras soluções. Seja $P(1) = a$. Então $P(2) = 4P(1) = 4$, $P(4) = 4P(2) = 16$, etc. Escolha um valor de n e encontre $n+1$ desses pontos para tentar passar um polinômio de grau no máximo n . O polinômio $P(x) = ax^2$ se encaixa, e portanto ele é o único. Isso pode ser feito com qualquer valor de n , então não há outros polinômios, de nenhum grau.

(b) Sabemos que $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ e que $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, então

$$(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 6.$$

Também sabemos que $(x+1) - (x-1) = 2$, então podemos juntar essas duas coisas e formar

$$P(x) = \frac{x^3 - x}{6} + k.$$

Para ver que não existem outras soluções, note que em um polinômio de grau n , o grau mais alto que vai aparecer em $(x+1)^n - (x-1)^n$ sempre é de grau $n-1$ com coeficiente $2n$, e os termos de graus menores não têm como formar um x^{n-1} para cancelar com este.

(c) Pela resposta da letra (a), aqui estamos dizendo que

$$Q(x) = P(x+1) - P(x-1) = ax^2,$$

porque a equação é $Q(2x) = 4Q(x)$. Multiplicando a resposta da letra (b) por a , temos que

$$P(x) = \tilde{a}(x^3 - x) + \tilde{k},$$

e essas são todas as soluções possíveis.

4. **(2,0 pontos)** Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
 Dados dois números reais positivos x, y , defina

$$g_{(x,y)} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_{(x,y)}(t) = |\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid ax + by \leq t\}|.$$

Aqui $|X|$ denota o número de elementos do conjunto X .

Assim, por exemplo,

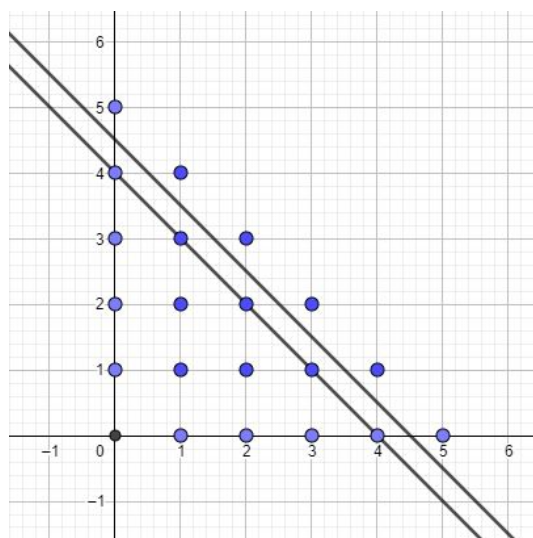
$$g_{(2,2)}(4) = |\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}| = 6,$$

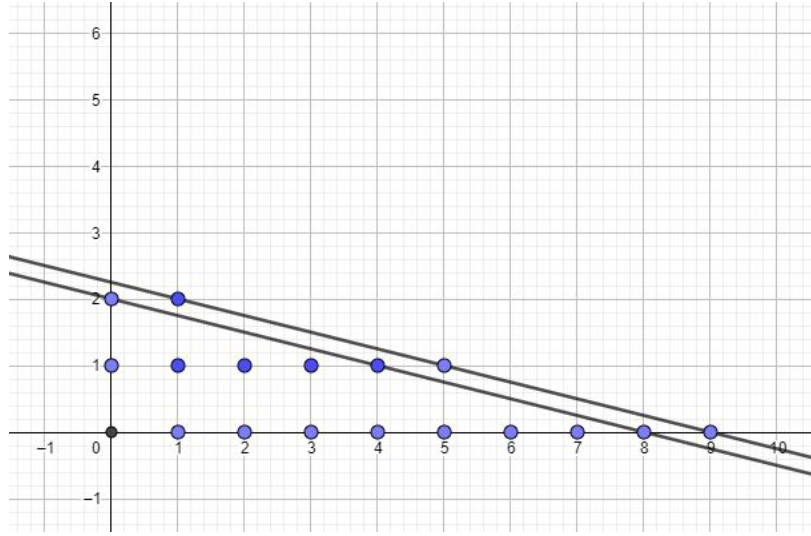
$$g_{(1,4)}(4) = |\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (0, 1)\}| = 6.$$

- (a) Calcule $g_{(2,2)}(8)$, $g_{(1,4)}(8)$, $g_{(2,2)}(9)$ e $g_{(1,4)}(9)$.
 (b) Diga se existe algum valor de t para o qual tenhamos $g_{(2,2)}(t) > g_{(1,4)}(t)$.
 (c) Determine para quais valores de $z \in (0, +\infty)$ vale a condição abaixo.
 Para todo $t \in [0, +\infty)$ temos $g_{(z,z)}(t) \leq g_{(1,3)}(t)$.

Solução:

(a) De forma geral, é a quantidade de pontos de coordenadas inteiras que ficam dentro do triângulo da figura. Desenhando os casos pedidos, temos $g_{(2,2)}(8) = 15$ e $g_{(2,2)}(9) = 15$ também: note que subir a reta um pouco faz com que as interseções com os eixos sejam 4.25 em vez de 4, mas isso não aumenta o número de pontos inteiros dentro do triângulo. Por outro lado, $g_{(1,4)}(8) = 15$ e $g_{(1,4)}(9) = 18$: note que mudar o t mantendo os valores de x e y é uma reta paralela. No caso, passar de 8 para 9 claramente criou o ponto $(9, 0)$, mas por ser paralela à anterior também foram criados os pontos $(5, 1)$ e $(1, 2)$.





(b) Para $g_{(2,2)}(t)$, começando com $t = 0$ e apenas 1 ponto $(0, 0)$, aumentando o valor de t gradualmente vemos a reta chegando a novos pontos inteiros exatamente quando t chega aos números pares. A quantidade de novos pontos também vai aumentando, porque a reta é diagonal, então com $t = 2$ surgem 2 novos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, com $t = 4$ surgem os pontos $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 2)$, e assim por diante.

Para $g_{(1,4)}(t)$, com $t = 0$ também começamos com apenas 1 ponto $(0, 0)$, mas cada vez que t chega a um número inteiro k , surge mais o ponto $(k, 0)$. Se $k \geq 4$, também surge o ponto $(k - 4, 1)$. Se $k \geq 8$, além desses surge também $(k - 8, 2)$, e assim por diante. Fazendo uma tabela para os primeiros números:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$g_{(2,2)}(t)$	1	1	3	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28	36	36	45
$g_{(1,4)}(t)$	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40	45

Vemos que, aparentemente, a resposta é não: em muitos casos eles são iguais, mas $g_{(2,2)}$ nunca é maior. Como $g_{(2,2)}$ aumenta só quando t é par e $g_{(1,4)}$ aumenta para todo t inteiro, resta provar que a soma de duas aumentadas do $g_{(1,4)}$ é igual a uma do $g_{(2,2)}$, pois já temos vários exemplos de que eles são iguais para todo t par, e queremos ver que isso continua assim. De $t - 2$ para t , $g_{(2,2)}$ aumenta em $\frac{t}{2} + 1$. De $t - 1$ para t , $g_{(1,4)}$ aumenta em $\left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor + 1$. Queremos provar que, para t par,

$$\frac{t}{2} + 1 = \left(\left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{t-1}{4} \right\rfloor + 1 \right).$$

Temos dois casos: $t = 4k$ ou $t = 4k + 2$. No primeiro caso,

$$2k + 1 = (k + 1) + ((k - 1) + 1),$$

e no segundo caso

$$2k + 1 + 1 = (k + 1) + (k + 1).$$

As duas coisas são claramente verdade, então concluímos que não, não existe nenhum valor de t para o qual $g_{(2,2)}(t) > g_{(1,4)}(t)$.

(c) Acrescentando $g_{(1,3)}(t)$ na tabela:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$g_{(2,2)}(t)$	1	1	3	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28	36	36	45
$g_{(1,3)}(t)$	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	51	57
$g_{(1,4)}(t)$	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40	45

Note que $g_{(1,3)}(t)$ funciona de forma muito parecida que $g_{(1,4)}(t)$, também aumentando nos inteiros, mas o tamanho dos aumentos muda de 3 em 3 e não de 4 em 4. Note também que a longo prazo ela fica maior do que $g_{(1,4)}(t)$, o que é natural, porque o triângulo dela tem a mesma base e uma altura maior ($\frac{t}{3}$ em vez de $\frac{t}{4}$), o que significa que todos os pontos que pertencem a um triângulo têm que pertencer também ao outro. Apesar disso, $g_{(1,3)}(2) = g_{(1,4)}(2) = 3$.

Quanto a $g_{(z,z)}(t)$, ela não precisa necessariamente aumentar em números inteiros, caso z não seja inteiro. Mas quanto maior for o z , mais devagar ela vai aumentar, e quanto menor o z , vai aumentar mais rápido. Isso significa que, no mínimo, $z \geq 2$, porque se fosse menor, aquele 3 apareceria antes de $t = 2$, o que não é permitido. Mas essa é a pior restrição - de resto, já vemos que $z = 2$ funciona, pois

$$g_{(2,2)}(t) \leq g_{(1,4)}(t) \leq g_{(1,3)}(t).$$

Portanto, a resposta é $z \in [2, \infty)$.

5. **(2,0 ponto)** Para k inteiro, $k > 2$, seja $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{k} + \frac{2k-2}{k^2} \cos(t) + \frac{2k-4}{k^2} \cos(2t) + \cdots + \frac{2}{k^2} \cos((k-1)t) \\ &= \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2k-2j}{k^2} \cos(jt). \end{aligned}$$

Para cada uma das equações abaixo, determine quantas soluções reais distintas ela admite no intervalo $t \in (-\pi, \pi]$.

- (a) $f_k(t) = 1$
- (b) $f_k(t) = 0$
- (c) $f_k(t) = \frac{1}{4}$

A sua resposta deve ser dada em função de k ; simplifique.

Solução:

(a) Quando $t = 0$, temos $\cos(jt) = 1$ para todo j , então

$$\begin{aligned} f_k(0) &= \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2k-2j}{k^2} \\ &= \frac{1}{k} + \frac{2}{k}(k-1) - \frac{2}{k^2} \sum_{j=1}^{k-1} j \\ &= 2 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2} \frac{(1+k-1)(k-1)}{2} = 1. \end{aligned}$$

Este é o maior valor que $f_k(t)$ pode ter e este é o único t que tem este valor, porque para qualquer outro, alguns cossenos (inclusive para $j = 1$) seriam menores do que 1.

(b) Reescreva o somatório com números complexos, definindo $z = e^{it}$, temos $\cos(jt) = \frac{z^j + z^{-j}}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} S &= k^2 f_k(t) = k + (2k-2) \cos(t) + (2k-4) \cos(2t) + \cdots + 2 \cos((k-1)t) \\ &= k + (k-1)(z + z^{-1}) + (k-2)(z^2 + z^{-2}) + \cdots + (z^{k-1} + z^{-(k-1)}) \\ &= z^{-(k-1)} + 2z^{-(k-2)} + \cdots + (k-1)z^{-1} + k + (k-1)z + \cdots + 2z^{(k-2)} + z^{(k-1)} \\ zS &= z^{-(k-2)} + 2z^{-(k-3)} + \cdots + (k-1) + kz + (k-1)z^2 + \cdots + 2z^{(k-1)} + z^k \\ z^{-1}S &= z^{-k} + 2z^{-(k-1)} + \cdots + (k-1)z^{-2} + kz^{-1} + (k-1) + \cdots + 2z^{(k-3)} + z^{(k-2)}. \end{aligned}$$

Calculando $2S - zS - z^{-1}S$, a maioria dos termos cancela, exceto pelo primeiro, o último, e o do meio. Então

$$2S - zS - z^{-1}S = -z^{-k} + 2 - z^k$$

e, portanto,

$$S = \frac{2 - (z^k + z^{-k})}{2 - (z + z^{-1})} = \frac{1 - \cos(kt)}{1 - \cos(t)}$$

e, finalmente,

$$f_k(t) = \frac{1 - \cos(kt)}{k^2(1 - \cos(t))} = \frac{\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)}{k^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Essa expressão não serve quando $\cos(t) = 1$ (ou seja, $t = 0$), por causa do denominador zero, mas este é o caso que já calculamos na letra (a). Aqui, para todos os outros valores de t , estamos vendo que $f_k(t) \geq 0$ por ser tudo quadrado, e que é zero exatamente quando $\frac{kt}{2} = n\pi$ para algum n inteiro, ou seja, $t = \frac{2n\pi}{k}$ (exceto $n = 0$ porque já vimos que $f_k(0) = 1$). Dentro do intervalo $(-\pi, \pi]$, portanto, f_k tem $k - 1$ raízes.

(c) Claramente, existe pelo menos um valor entre $t = 0$ e $t = \frac{2\pi}{k}$, pois neste intervalo a função vai de 1 para 0 e tem que passar pelo $\frac{1}{4}$. Seja

$$g_k(s) = \frac{\sin(ks)}{k \sin(s)}.$$

Então temos $f_k(t) = g_k^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Queremos concluir que $-\frac{1}{2} < g_k(s) < \frac{1}{2}$ fora do intervalo $\left(\frac{-\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right)$ pois então não existem outros valores onde a função seja maior ou igual a $\frac{1}{4}$ mais longe (mais tarde vamos ver que também não tem outras raízes além da obrigatória neste primeiro intervalo).

Primeiro vamos analisar os valores de $s \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{k}\right) \cup \left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{2}\right]$. Para o numerador, vamos usar $|\sin(ks)| \leq 1$. No denominador, $|\sin(s)| \geq \left|\frac{2s}{\pi}\right|$.

Temos então

$$|g_k(s)| \leq \left| \frac{1}{k \frac{2s}{\pi}} \right| < \left| \frac{1}{k \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{k}} \right| = \frac{1}{2}.$$

Agora resta ver que, no intervalo $s \in (0, \frac{\pi}{k})$, temos exatamente uma solução, e não mais do que uma. (Daí vai ter outra equivalente no intervalo $s \in (\frac{-\pi}{k}, 0)$, e a resposta é que existem 2 soluções de $f_k(t) = \frac{1}{4}$.) Vamos fazer isso mostrando que $g_k(s)$ é sempre decrescente neste intervalo. Temos

$$g'_k(s) = \frac{\cos(ks)k^2 \sin(s) - \sin(ks)k \cos(s)}{k^2 \sin^2(s)} = \frac{\cos(ks)k \sin(s) - \sin(ks) \cos(s)}{k \sin^2(s)}.$$

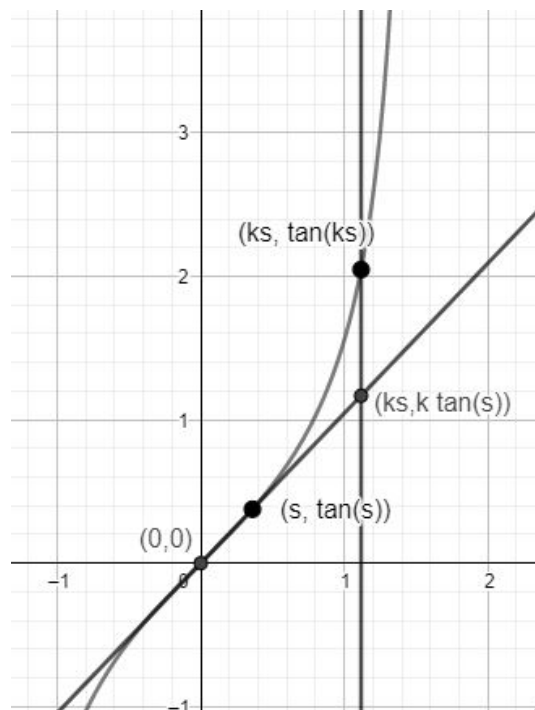
Como $\sin(s) = 0$ apenas quando $s = 0$, então o denominador não será um problema. A função é decrescente se

$$\cos(ks)k \sin(s) \leq \sin(ks) \cos(s).$$

Podemos reescrever como

$$k \tan(s) \leq \tan(ks),$$

no caso de $s \in (0, \frac{\pi}{2k})$, pois aí os cossenos pelos quais dividimos eram positivos. (No caso de $s \in [\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k})$ a desigualdade é claramente verdade porque o lado esquerdo é menor ou igual a zero.) Como $ks < \frac{\pi}{2}$, a figura a seguir mostra que a desigualdade é verdadeira pelo fato de o gráfico de tangente ter concavidade para cima neste intervalo, concluindo a demonstração:



6. **(2,0 ponto)** As sequências de Fibonacci e de Lucas são definidas recursivamente:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, & F_0 &= 0, & F_1 &= 1, \\ L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n, & L_0 &= 2, & L_1 &= 1. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $L_2 = 3$, $L_3 = 4$ e $L_4 = 7$.

Seja $p \geq 2$ um número primo. Dizemos que p é *azul* se existir um inteiro positivo k tal que L_k seja múltiplo de p . Assim, por exemplo, $p = 7$ é azul pois L_4 é múltiplo de p . Por outro lado, dizemos que p é *vermelho* se não existir nenhum inteiro positivo k para o qual L_k seja múltiplo de p .

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.

- (a) Existem infinitos primos azuis.
- (b) Existem infinitos primos vermelhos.

Solução:

Por indução provamos facilmente que, para todo n ,

$$F_{n\pm 1} = \frac{L_n \pm F_n}{2}, \quad L_{n\pm 1} = \frac{5F_n \pm L_n}{2}. \quad (1)$$

Observe que se n é múltiplo de 3 então F_n e L_n são pares; n não é múltiplo de 3 então F_n e L_n são ímpares. Seja $p > 2$ primo: afirmamos que não podemos ter simultaneamente $F_n \equiv L_n \equiv 0 \pmod{p}$, $n \in \mathbb{Z}$.

De fato, suponha por absurdo que exista $n \in \mathbb{Z}$ tal que $F_n \equiv L_n \equiv 0 \pmod{p}$. Temos pelas relações acima que $F_{n\pm 1} \equiv L_{n\pm 1} \equiv 0 \pmod{p}$ e portanto, por indução, $F_m \equiv L_m \equiv 0 \pmod{p}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, absurdo.

Dado um primo $p > 2$, seja t_p o menor inteiro positivo t tal que $F_t \equiv 0 \pmod{p}$ ou $L_t \equiv 0 \pmod{p}$; pela observação anterior, sabemos que não podem valer as duas condições simultaneamente.

Assim, por exemplo, para $p = 11$ temos $t_p = 5$ com $L_5 = 11 \equiv 0 \pmod{11}$. Para $p = 13$ temos $t_p = 7$ com $F_7 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$. Para $p = 17$ temos $t_p = 9$ com $F_9 = 34 \equiv 0 \pmod{17}$. Para $p = 19$ temos $t_p = 9$ com $L_9 = 76 \equiv 0 \pmod{19}$.

Afirmamos que se $F_{t_p} \equiv 0 \pmod{p}$ então p é vermelho; claramente, se $L_{t_p} \equiv 0 \pmod{p}$ então p é azul.

Suponha $F_{t_p} \equiv 0 \pmod{p}$. Seja $a = F_{t_p+1}$. Da recorrência do enunciado temos $F_{t_p-1} \equiv a \pmod{p}$. Da equação (1) temos $L_{t_p} \equiv 2a \pmod{p}$ e $L_{t_p+1} \equiv a \pmod{p}$. Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$F_{n+t_p} \equiv aF_n \pmod{p}, \quad L_{n+t_p} \equiv aL_n \pmod{p}.$$

De fato, a afirmação vale para $n = 0$ e $n = 1$: a afirmação segue por indução usando a recorrência do enunciado ou a equação (1). Temos portanto $F_n \equiv 0 \pmod{p}$ se e somente se $n = kt_p$, $k \in \mathbb{Z}$. A congruência $L_n \equiv 0 \pmod{p}$ não admite solução e portanto p é vermelho.

Suponha $L_{t_p} \equiv 0 \pmod{p}$: claramente p é azul. Seja $a = L_{t_p+1}$ e $\tilde{a} = F_{t_p+1}$. Da equação (1) temos $F_{t_p} \equiv 2\tilde{a} \pmod{p}$. Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$L_{n+t_p} \equiv aF_n \pmod{p}, \quad F_{n+t_p} \equiv \tilde{a}L_n \pmod{p}.$$

De fato, a afirmação vale para $n = 0$ e $n = 1$: a afirmação segue por indução usando a recorrência do enunciado. Temos portanto $F_n \equiv 0 \pmod{p}$ se e somente se $n = 2kt_p$, $k \in \mathbb{Z}$; analogamente, $L_n \equiv 0 \pmod{p}$ se e somente se $n = (2k+1)t_p$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que se F_n ou L_n é par então n é múltiplo de 3. Além disso, se F_n ou L_n é múltiplo de 3 então n é par. Assim se $q \geq 5$ é primo então F_q e L_q são ambos ímpares com todos os fatores primos maiores do que 3.

Seja $q > 3$ primo. Seja $p > 2$ um fator primo de F_q (lembre que F_q e L_q são ímpares). O primo p não pode ser azul pois q é ímpar: assim p é vermelho. Claramente, todo fator primo $p > 2$ de L_q é azul.

Se p é primo e $q_0, q_1 > 2$ são primos distintos não podemos ter simultaneamente q_0 e q_1 múltiplos de t_p . Assim para primos q distintos obtemos fatores primos p de F_q ou L_q também distintos. As afirmações do enunciado são portanto ambas verdadeiras.

Por exemplo, tomando $q = 5$ temos $F_q = 5$ e $L_q = 11$, ambos primos. Assim 5 é vermelho e 11 é azul. Tomando $q = 7$ temos $F_q = 13$ e $L_q = 29$, ambos primos. Assim 7 é vermelho e 29 é azul. Tomando $q = 59$ temos

$$F_q = 353 \cdot 2710260697, \quad L_q = 709 \cdot 8969 \cdot 336419.$$

Assim os primos 353 e 2710260697 são vermelhos e os primos 709, 8969 e 336419 são azuis.

Observe que este método nos dá um conjunto infinito de primos vermelhos e um conjunto infinito de primos azuis, que é o que o problema pede. Mas muitos primos não são listados por esse método. Temos

$$F_{27} = 2 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 109, \quad F_9 = 2 \cdot 17, \quad F_3 = 2$$

e portanto os primos 17, 53 e 109 são vermelhos.