Álgebra Linear I - Aula 22

1. Bases Ortonormais.
2. Matrizes Ortogonais.
3. Exemplos.

1 Bases Ortonormais

Lembre que uma base β é *ortogonal* se está formada por vetores ortogonais entre si: para todo par de vetores distintos u e v da base β se verifica que $u \cdot v = 0$.

Uma base γ é *ortonormal* se é ortogonal e todo vetor da base é um vetor unitário (ou seja, $u \cdot u = 1$ para todo vetor de γ).

Como já vimos, calcular as coordenadas de um vetor em uma base ortogonal é muito simples (mais ainda se a base é ortonormal). Suponha que estamos em $\mathbb{R}^3$ e que $\beta = \{u, v, w\}$ é uma base ortonormal. Queremos determinar as coordenadas de um vetor ℓ na base β, ou seja

$$(\ell)_\beta = (a, b, c), \quad \ell = a\, u + b\, v + c\, w.$$

Para determinar a considere $\ell \cdot u$,

$$\ell \cdot u = (a\, u + b\, v + c\, w) \cdot u = a\, (u \cdot u) + b\, (u \cdot v) + c\, (u \cdot w).$$

Observe que, como a base é ortonormal, $u \cdot u = 1$, $u \cdot v = 0 = u \cdot w$. Logo

$$a = \ell \cdot u.$$

Analogamente obtemos,

$$b = \ell \cdot v, \qquad c = \ell \cdot w.$$

Exercício 1. *Encontre uma base ortonormal β que contenha dois vetores paralelos a $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$. Obtida a base β, determine as coordenadas do vetor $(1, 2, 3)$ em dita base.*

Resposta: O terceiro vetor da base deve ser ortogonal a $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$, portanto, é paralelo a $(1,1,1)\times(1,-1,0)$, isto é, paralelo a $(1,1,-2)$. Uma possível base β (existem muitas possibilidades) é

$$\beta=\{(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})\}.$$

As coordenadas de $(1,2,3)$ na base β são (a,b,c) onde

$$\begin{aligned}
a&=(1,2,3)\cdot(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=6/\sqrt{3},\\
b&=(1,2,3)\cdot(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)=-1/\sqrt{2},\\
c&=(1,2,3)\cdot(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})=-3/\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Obtemos assim as coordenadas. □

2 Matrizes ortogonais

Dada uma matriz quadrada M sua *transposta,* denotada M^t, é uma matriz cujas linhas são as colunas de M, ou seja, se $M=(a_{i,j})$ e $M^t=(b_{i,j})$ se verifica $b_{j,i}=a_{i,j}$.

Definição 1 (Matriz ortogonal)**.** *Uma matriz M é* ortogonal *se é inversível e $M^{-1}=M^t$, ou seja,*

$$MM^t=M^tM=Id.$$

Observe que se M é ortogonal então sua transposta também é ortogonal (veja que $(M^t)^{-1}=M$). Portanto, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedade 2.1. *Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal (de fato, isto é uma definição geométrica alternativa de matriz ortogonal).*

Prova: Para simplificar a notação veremos a afirmação para matrizes 2×2. Seja M uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u=(a,b)$ e $v=(c,d)$.

$$\begin{aligned}
Id &= M^tM=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\,a+b\,b & a\,c+b\,d\\ a\,c+b\,d & c\,c+d\,d\end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} u\cdot u & u\cdot v\\ u\cdot v & v\cdot v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo

$$u \cdot u = v \cdot v = 1, \quad u \cdot v = 0,$$

e u e v formam uma base ortonormal. □

De fato, o argumento anterior mostra o seguinte:

Propriedade 2.2. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.*

Multiplicando MM^t, v. obterá a mesma afirmação para os vetores linha:

Propriedade 2.3. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores linha formam uma base ortonormal.*

Observação 1. *O fato anterior implica que a matriz de uma rotação ou de um espelhamento (na base canônica) é uma matriz ortogonal. Também implica que a matriz de uma projeção não é ortogonal (em nenhuma base).*

2.1 Conclusão

Quando uma transformação linear T tem uma base ortonormal β de autovetores o processo de diagonalização se simplifica substancialmente: existe uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que

$$[T] = P\,D\,P^t,$$

onde P é a matriz cujos vetores coluna são os vetores da base β.

3 Exemplos

Exemplo 1. *Considere a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor de M, encontre uma matriz ortogonal P que diagonalize a matriz. Isto é, devemos encontrar uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $M = P\,D\,P^t$ onde P é ortogonal.

Prova: Observe que os vetores coluna de P são autovetores de M. Como P é ortogonal, as colunas de P devem formar uma base ortonormal de autovetores de M.

Determinaremos em primeiro lugar os autovetores associados a 2. Devemos resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 & 2 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 2 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos que os autovetores $v = (x, y, z)$ associados a dois verificam

$$x + y + z = 0.$$

Portanto, é possivel obter dois autovetores linearmente independentes associados a 2. Assim, a multiplicidade de 2 é 2 ou 3. Mas o último caso pode ser eliminado, se a multiplicidade for 3 então o traço de M seria $2 + 2 + 2 = 6 \neq 4 + 4 + 4 = 12$. Logo o autovalor 2 tem multiplicidade 2.

Usando o traço da matriz M temos que o outro autovalor σ de M verifica

$$2 + 2 + \sigma = 4 + 4 + 4, \quad \sigma = 8.$$

Para determinar os autovetores associados a 4 devemos resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4-8 & 2 & 2 \\ 2 & 4-8 & 2 \\ 2 & 2 & 4-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$2\,x - y - z = 0, \quad x - 2\,y + z = 0, \quad x + y - 2\,z = 0.$$

Isto é

$$x - 2\,y + z = 0, \quad x + y - 2\,z = 0, \quad 2\,x - y - z = 0.$$

Escalonando,

$$x - 2\,y + z = 0, \quad 3\,y - 3\,z = 0, \quad -3\,y + 3\,z = 0.$$

Assim um autovetor associado a 8 é $(1, 1, 1)$.

Uma base ortonormal de autovetores de M é

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$$

onde os vetores são autovetores associados a 4, 2 e 2.

A matriz de M na base β é

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M = P\,D\,P^t, \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 2. *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determine os autovalores de A.*

(b) *Determine uma base ortonormal de autovetores A.*

(c) *Determine uma forma diagonal D de A.*

(d) *Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.*

(e) *Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.*

Resposta: O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (6-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9)) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Observe que o polinômio $(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ tem raízes $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Logo as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = 6, 4, -2$. Observe que este resultado é coerente com o traço ser 8 e o determinante ser -48.

Uma base de autovetores é obtida da seguinte forma.
autovetores associados a 6: são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 3 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-5x + 3y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

As soluções são da forma $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(0, 1, 0)$.

autovetores associados a 4: são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 3 \\ 0 & 6-4 & 0 \\ 3 & 0 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-3x + 3y = 0, \quad 3y = 0, \quad 3x - 3y = 0.$$

As soluções são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(1, 0, 1)$.

autovetores associados a -2: Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a -2 devem ser ortogonais a $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo um autovetor é $(1, 0, -1)$.

Portanto, uma base de autovetores é

$$\gamma = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Esta base é ortogonal. Uma base ortonormal de autovetores é

$$\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

Na base β a matriz de A é diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Considerando agora uma base ortonormal de autovetores de A,

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\},$$

temos

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como M é ortogonal,

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M.$$

Como A tem determinante não nulo (o produto dos autovetores é diferente de zero) existe A^{-1}. Temos

$$A^{-1} = (MDM^{-1})^{-1} = MD^{-1}M^{-1} = MD^{-1}M.$$

Logo $N = N^{-1} = M$. Finalmente,

$$E = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3. *Considere a matriz*

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontre P ortogonal e D diagonaltais que $B = PDP^t$.

Resposta: Isto significa que P é uma matriz ortogonal cujos vetores são autovetores de B.

Calculando o polinômio característico e fazendo os cálculos temos que os autovalores de B são 2, 1 e -1.

Resolvendo sistemas lineares obtemos que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ é um autovetor associado a 2, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é é um autovetor associado a -1, e $\vec{w} = (1, 1, -2)$ é um autovetor associado a 1. Também vemos que estes vetores são ortogonais. Normalizando obtemos uma base ortonormal de autovetores.

Portanto,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que como P é ortogonal P^{-1} é sua transposta.