4ª prova de Introd. à Análise – 10/12/2009

Nome: ____

1. Seja (x_n) uma sequência tal que $|x_n - x_{n+1}| < 2^{-n}$ para todo n. Mostre que a sequência é convergente.

2. Denote $\lfloor y \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$ ("*floor function*"). Sendo a e b reais positivos, calcule o limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor .$$

(Evidentemente, você tem que provar que está correto.)

3. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada *localmente limitada* se para todo $x \in X$ existe $\delta > 0$ e existe $M > 0$ tal que

$$y \in X,\ |y - x| < \delta \ \Rightarrow\ |f(y)| < M .$$

a) Prove que se o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ *não* é compacto então existe uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que é localmente limitada, mas não é limitada.

b) Reciprocamente, prove que se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é necessariamente limitada.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que a imagem $f(A)$ de qualquer conjunto aberto A é também um conjunto aberto. Prove que f é injetiva e portanto monótona.