

MAT1605 - Introdução à Análise
Prof: Flávio Abdenur
13/12/2010
Horário: 15:00 – 17:00

Prova 2

(O valor de cada questão está entre colchetes, no início de cada enunciado.)

1. [2,0] Mostre que se $\{a_n\}$ é decrescente e $\sum a_n$ converge então vale

$$\lim n \cdot a_n = 0$$

2. [1,5] Mostre que se todo ponto de acumulação de X é unilateral então X é enumerável.

3. [3,0] Mostre que se K é um intervalo compacto e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de K por intervalos abertos, então existe uma subcobertura finita de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ que cobre K .

4. [2,0] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que as três seguintes condições são equivalentes:

i) Vale $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = +\infty$;

ii) Se $|x_n| \rightarrow +\infty$, então $|f(x_n)| \rightarrow +\infty$;

iii) Se K é compacto, então $f^{-1}(K)$ é compacto.

5. [1,5] Seja K um subconjunto da reta com a seguinte propriedade: toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada. Prove que K é compacto.