1ª prova de Introdução à Análise – PUC-Rio – 06/09/11

GABARITO

1. [1½ pt] Sejam A, $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios limitados superiormente. Suponha que para todo $a \in A$ existe algum $b \in B$ tal que $b \geq a$. Prove que $\sup A \leq \sup B$.

> **Resolução:** Seja $a \in A$ arbitrário. Por hipótese, existe $b \in B$ tal que $b \geq a$. Como $\sup B$ é cota superior de B, temos $b \leq \sup B$. Logo $a \leq \sup B$, o que prova que $\sup B$ é cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A, temos $\sup A \leq \sup B$.

2. [1 ½ pt] Prove que se (x_n) é uma sequência convergente então $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$.

> **Resolução:** Seja $L = \lim x_n$ Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Por definição de limite (aplicada ao número positivo $\varepsilon' = \varepsilon/2$), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|x_n - L| < \varepsilon/2$.
>
> Suponha $n \geq n_0$. Então também vale $n + 1 \geq n_0$. Usando a desigualdade triangular:
>
> $$|x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - L| + |x_{n+1} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
>
> Isso prova que $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$.

3. Diga se cada afirmação é VERDADEIRA ou FALSA, provando ou dando contra-exemplo:

   (a) [1½ pt] Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto infinito não-enumerável então X contém algum intervalo $[a, b]$ com $a < b$.

   > **Resolução:** Afirmação FALSA. Vimos em aula que o conjunto X dos irracionais é infinito não-enumerável, e que todo intervalo $[a, b]$ com $a < b$ contém um número racional (logo não é verdade que $[a, b] \subset X$).

   (b) [1½ pt] Se a sequência (x_n) é limitada e $\lim y_n = 0$ então $\lim x_n y_n = 0$.

   > **Resolução:** Afirmação VERDADEIRA. Como a sequência (x_n) é limitada, existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim y_n = 0$ e $\varepsilon/M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|y_n - 0| < \varepsilon/M$. Logo $|x_n y_n - 0| \leq M|y_n| < \varepsilon$.

   (c) [1½ pt] Se $\lim y_n = 0$ e $\lim x_n y_n = 0$ então a sequência (x_n) é limitada.

   > **Resolução:** Afirmação FALSA. Se $x_n = n$ e $y_n = 1/n^2$ então $\lim y_n = 0$ e $\lim x_n y_n = 0$, mas a sequência (x_n) não é limitada.

4. (a) [1½ pt] Prove a seguinte "desigualdade de Bernoulli melhorada":

$$n \in \mathbb{N},\ x \geq 0 \ \Rightarrow\ (1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \,.$$

Resolução: Se $n = 1$ a desigualdade fica $(1+x)^1 \geq 1+1x+0x^2$, que é verdadeira. Por indução, suponha que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ para todo $x \geq 0$. Multiplique ambos os lados por $1 + x$ (que é positivo), obtendo:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\geq \Big(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\Big) + \Big(x + nx^2 + \underbrace{\cancel{\frac{n(n-1)}{2}x^3}}_{\geq 0}\Big) \\ &\geq 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2,\end{aligned}$$

que é a desigualdade em questão com $n + 1$ no lugar de n. Isto prova a afirmação por indução.

(b) [1½ pt] Use o item (a) para provar que: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. *Atenção: Não vale usar nenhuma propriedade de limite além das que foram provadas em aula!*

Resolução: Usamos o item (a) com $x = 1$:

$$0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1 + n + n(n-1)/2} = \frac{2n}{n^2 + n + 2}\,.$$

Se provarmos que o lado direito converge a zero quando $n \to \infty$, então pelo "Teorema do Sanduíche" (provado em aula) iremos concluir que $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. Para analisar o lado direito, dividimos numerador e denominador por n^2:

$$\begin{aligned}\lim \frac{2n}{n^2+n+4} &= \lim \frac{2/n}{1 + 1/n + 2/n^2} \\ &= \lim \frac{2\lim(1/n)}{1 + \lim(1/n) + 2(\lim 1/n)^2} = \frac{2\cdot 0}{1 + 0 + 2\cdot 0^2} = 0.\end{aligned}$$

(Usamos propriedades aritméticas de limites e que $\lim(1/n) = 0$; tudo isso foi provado em aula.

Resolução: Outra maneira, mais esperta: Partindo do item (a), temos: $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} \geq \frac{n^2}{2}$. Logo $\frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n}$. Daqui é mais fácil terminar...

Curiosidade: Como vimos agora, é verdade que $2^n \geq n^2/2$ para todo n. Mas tente provar isso por indução (faça isso!); você não conseguirá! Por outro lado, a afirmação mais forte $2^n \geq (n^2 + n + 2)/2$ pode ser provada por indução sem problemas (as contas são as mesmas da parte (a) com $x = 1$). Este é um (falso) paradoxo conhecido dos matemáticos: *Demonstrar uma coisa mais forte pode ser mais fácil!* No caso em questão, a explicação é que a 2ª hipótese de indução é mais forte e assim permite uma conclusão mais forte.