

O modelo do vento nas árvores

Carlos Matheus

CNRS, LAGA, Université Paris 13, Villetaneuse, França
(email: matheus @ math.univ-paris13.fr)

18 de novembro de 2011

Sumário

- 1 Introdução
 - Definição do modelo
 - Difusão no m.v.a.
 - O teorema de V. Delecroix, P. Hubert e S. Lelièvre
- 2 Idéia da prova do teorema de Delecroix-Hubert-Lelièvre
 - Construção de Katok-Zemliakov
 - Cociclos com valores em \mathbb{Z}^2
 - Fluxo de Teichmüller
 - Cociclo de Kontsevich-Zorich
 - Expoentes de Lyapunov e velocidade de difusão
 - Fim da prova do teorema
- 3 Comentários sobre difusão mais rápida que 2/3

Vento nas árvores

- Paul e Tatiana Ehrenfest (1912): como modelo “alternativo” para gases de Lorenz, considere um *bilhar* num plano \mathbb{R}^2 onde uma família de obstáculos retangulares são removidos;

Vento nas árvores

- Paul e Tatiana Ehrenfest (1912): como modelo “alternativo” para gases de Lorenz, considere um *bilhar* num plano \mathbb{R}^2 onde uma família de obstáculos retangulares são removidos;
- J. Hardy e J. Weber (1980): como caso particular do modelo anterior, dispomos obstáculos retangulares de dimensões $a \times b$, $0 < a, b < 1$, de maneira \mathbb{Z}^2 -periódica.

Vento nas árvores

- Paul e Tatiana Ehrenfest (1912): como modelo “alternativo” para gases de Lorenz, considere um *bilhar* num plano \mathbb{R}^2 onde uma família de obstáculos retangulares são removidos;
- J. Hardy e J. Weber (1980): como caso particular do modelo anterior, dispomos obstáculos retangulares de dimensões $a \times b$, $0 < a, b < 1$, de maneira \mathbb{Z}^2 -periódica.

Para simplificar, vamos abreviar “modelo do vento nas árvores” por m.v.a.

Exemplo 1

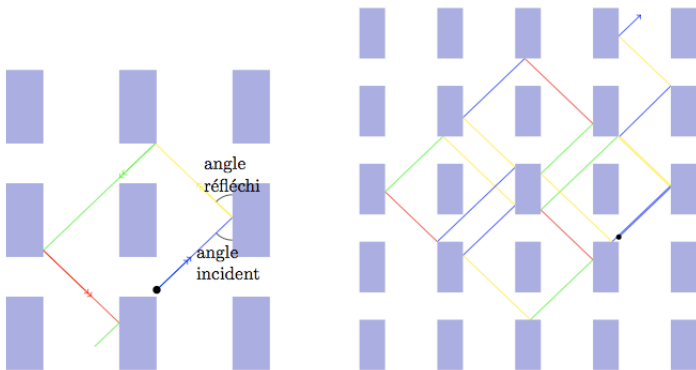


Figura: M.v.a. \mathbb{Z}^2 -periódico com parâmetros $a = 0.33$ e $b = 0.65$ (figura extraída da tese de Vincent Delecroix).

Exemplo 2

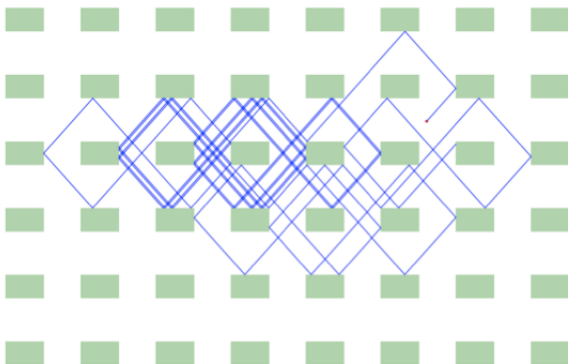


Figura: Trajetória desenhada com um pequeno programa escrito por V. Delecroix (disponível na página <http://iml.univ-mrs.fr/~delecroi/>).

Exemplo 3

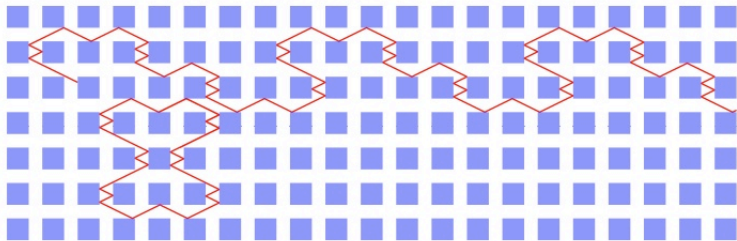


Figure 1: A periodic and a divergent orbits in a half-divergent direction of the “golden wind-tree model” with parameters $a = b = \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Figura: Exemplos dos diversos comportamentos dinâmicos nos m.v.a's (outra figura da tese de V. Delecroix).

Resultados de J. Hardy e J. Weber

No artigo de 1980, os físicos (de Orsay) J. Hardy e J. Weber mostraram uma difusão $\log t \log \log t$ para direções *especiais* $\theta = \arctan(p/q)$, $p/q \in \mathbb{Q}$, correspondendo a “*diagonais generalizadas*” (e.g., $a = b = 1/2$ e $\theta = \pi/4$).

Resultados de J. Hardy e J. Weber

No artigo de 1980, os físicos (de Orsay) J. Hardy e J. Weber mostraram uma difusão $\log t \log \log t$ para direções *especiais* $\theta = \arctan(p/q)$, $p/q \in \mathbb{Q}$, correspondendo a “*diagonais generalizadas*” (e.g., $a = b = 1/2$ e $\theta = \pi/4$).

Mais ainda, eles *conjecturaram* a possibilidade de difusão *anormal* para direções *típicas* θ . Em outras palavras, denotando por x um ponto típico no bilhar e $\phi_t^\theta(x)$ o fluxo de translação na direção θ , a difusão “anormal” significa

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} > 1/2$$

Difusão anormal

Observação:

O teorema de S. Kerckhoff, H. Masur e J. Smillie diz que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(x, \phi_t^\theta(x)) = 0 \text{ (difusão é sempre sublinear).}$$

Difusão anormal

Observação:

O teorema de S. Kerchhoff, H. Masur e J. Smillie diz que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(x, \phi_t^\theta(x)) = 0 \text{ (difusão é sempre sublinear).}$$

A justificativa para a nomenclatura “anormal” surge ao compararmos m.v.a. com o *movimento Browniano / teorema central do limite*: uma vez que a difusão é sublinear (após descontarmos a “média”), o fator de escala natural (para convergir para uma distribuição normal) é $\sqrt{t} = t^{1/2}$, ou seja, o “normal” seria obter

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} = 1/2.$$

Enunciado do teorema

Teorema (V. Delecroix, P. Hubert e S. Lelièvre [19/09/2011])

Para x típico (i.e., com trajetória infinita), temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} = 2/3$$

nos seguintes casos:

(a) para q.t.p. $0 < a, b < 1$ e q.t.p. θ

Enunciado do teorema

Teorema (V. Delecroix, P. Hubert e S. Lelièvre [19/09/2011])

Para x típico (i.e., com trajetória infinita), temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} = 2/3$$

nos seguintes casos:

- (a) para q.t.p. $0 < a, b < 1$ e q.t.p. θ
- (b) $a, b \in \mathbb{Q}$ e q.t.p. θ

Enunciado do teorema

Teorema (V. Delecroix, P. Hubert e S. Lelièvre [19/09/2011])

Para x típico (i.e., com trajetória infinita), temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} = 2/3$$

nos seguintes casos:

- (a) para q.t.p. $0 < a, b < 1$ e q.t.p. θ
- (b) $a, b \in \mathbb{Q}$ e q.t.p. θ
- (c) $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (D livre de quadrados), $\frac{1}{1-a} = x + y\sqrt{D}$ e $\frac{1}{1-b} = (1-x) + y\sqrt{D}$.

Resultados ainda mais recentes

Vincent Delecroix comunicou que para outros m.v.a. periódicos (Λ -periódicos com $\Lambda \neq \mathbb{Z}^2$), a difusão pode ser *mais rápida* que $2/3$. Se o tempo permitir, no final da palestra iremos comentar sobre isso.

Superfície de translação associada a um bilhar

Dado um bilhar num polígono *racional* (i.e., ângulos internos são múltiplos racionais de π), podemos desdobrar o polígono através de um número *finito* de reflexões de seus lados para obter uma *superfície de translação* tal que o bilhar no polígono inicial é equivalente ao fluxo de translação na superfície de translação associada.

Superfície de translação associada a um bilhar

Dado um bilhar num polígono *racional* (i.e., ângulos internos são múltiplos racionais de π), podemos desdobrar o polígono através de um número *finito* de reflexões de seus lados para obter uma *superfície de translação* tal que o bilhar no polígono inicial é equivalente ao fluxo de translação na superfície de translação associada.

Na literatura, esse processo de desdobramento foi introduzido por Fox-Kershner em 1936 e redescoberto por Katok-Zemliakov em 1975.

Desdobrando o m.v.a. (parte 1)

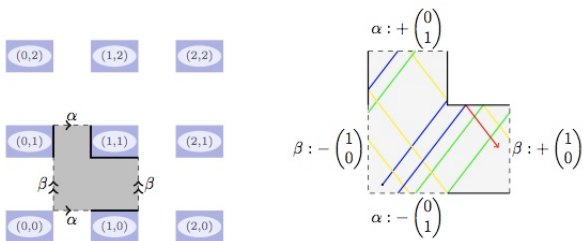


Figura: Domínio fundamental do bilhar no m.v.a.

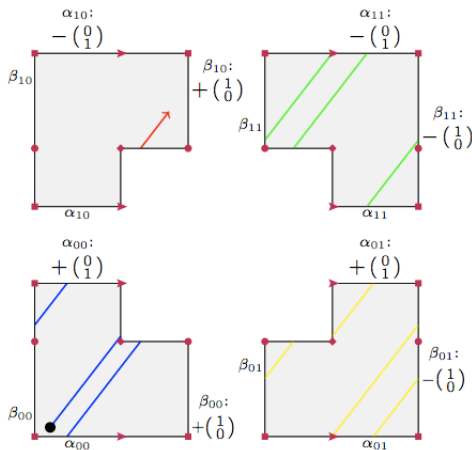
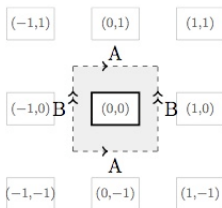


Figura: Construção de Katok-Zemliakov no bilhar acima gerando uma superfície de translação $X(a, b)$.

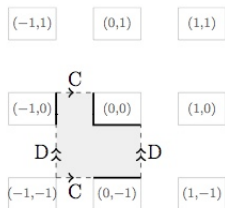
Nas figuras anteriores, o bilhar no m.v.a. foi representado como um cociclo com valores em \mathbb{Z}^2 sobre o bilhar num domínio fundamental (a figura em L), ou equivalentemente, como um cociclo com valores em \mathbb{Z}^2 sobre o fluxo de translação na superfície de translação $X(a, b)$ representada pelos 4 L's.

Dois domínios fundamentais no m.v.a.

Observação: Um domínio fundamental “mais natural” é mostrado na figura abaixo. Entretanto, esta mesma figura mostra que esses domínios são equivalentes do ponto de vista dinâmico.



(a) Fundamental domain of the billiard table $T(a,b)$ as a torus with a rectangle scatterer.



(b) Fundamental domain of the billiard table $T(a,b)$ as a L shaped surface with barriers.

Geometria de $X(a, b)$

Uma verificação direta mostra que $X(a, b)$ possui 4 zeros com ângulos totais $\frac{3\pi}{2} \times 4 = 6\pi$, i.e., $X(a, b)$ possui 4 zeros duplos ($X(a, b) \in \mathcal{H}(2, 2, 2, 2)$), de modo que esta é uma superfície de Riemann de gênero 5.

Bilhar no m.v.a. e interseções de classes de homologia

Uma maneira de reinterpretar o cociclo com valores em \mathbb{Z}^2 sobre o fluxo de translação ϕ_t^θ em $X(a, b)$ consiste em considerar γ_t^θ o caminho *fechado* simples obtido pela união de $\ell_t^\theta(x) := [x, \phi_t^\theta(x)]$ com um pequeno segmento (*limitado*) entre ϕ_t^θ e x para “fechar” $\ell_t^\theta(x)$.

Bilhar no m.v.a. e interseções de classes de homologia

Com esta notação, o estudo do fluxo $\phi_t^\theta(x)$ (de translação no \mathbb{Z}^2 -recobrimento $X_\infty(a, b)$ de $X(a, b)$), ou equivalente, do cociclo com valores em \mathbb{Z}^2 mencionado acima, pode ser feito através do estudo da interseção *algébrica* com

$$f = \begin{pmatrix} v_{00} - v_{10} + v_{01} - v_{11} \\ h_{00} - h_{01} + h_{10} - h_{11} \end{pmatrix} \in H_1(X, \mathbb{Z}^2).$$

De fato, esse é o conteúdo do seguinte lema:

Bilhar no m.v.a. e interseções de classes de homologia

Com esta notação, o estudo do fluxo $\phi_t^\theta(x)$ (de translação no \mathbb{Z}^2 -recobrimento $X_\infty(a, b)$ de $X(a, b)$), ou equivalente, do cociclo com valores em \mathbb{Z}^2 mencionado acima, pode ser feito através do estudo da interseção *algébrica* com

$$f = \begin{pmatrix} v_{00} - v_{10} + v_{01} - v_{11} \\ h_{00} - h_{01} + h_{10} - h_{11} \end{pmatrix} \in H_1(X, \mathbb{Z}^2).$$

De fato, esse é o conteúdo do seguinte lema:

Lema

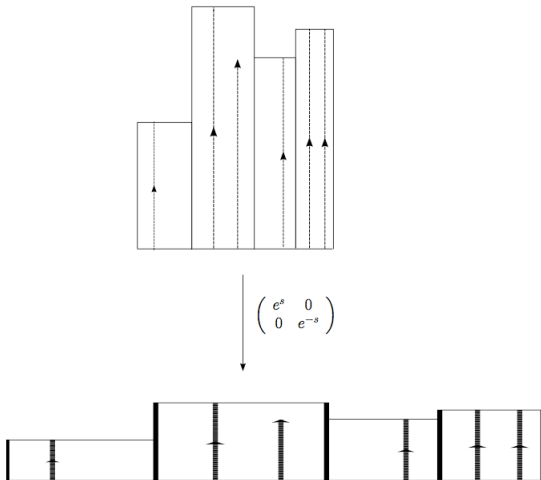
$d_{\mathbb{R}^2}(\phi_t^\theta(x), \langle f, \gamma_t^\theta(x) \rangle) \leq \sqrt{2}$ e, em particular,
 $|d(x, \phi_t^\theta(x)) - \|\langle f, \gamma_t^\theta(x) \rangle\|_{\mathbb{R}^2}| \leq \sqrt{2}$.

Prova. $\sqrt{2}$ é o diâmetro do domínio fundamental.

Fluxo de Teichmüller para “encurtar” $\ell_t^\theta(x)$

Seguindo os trabalhos de A. Zorich (1994 e 1996) e G. Forni (1997 e 2001), rodando a superfície (para que o ângulo θ corresponda a $\pi/2$) e aplicando o fluxo de Teichmüller $g_s := \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$ à superfície de translação, podemos encurtar $\ell_t^\theta(x)$ para que o novo segmento tenha tamanho 1 (escolhendo $t = e^s$).

Ação do fluxo de Teichmüller



Recorrência do fluxo de Teichmüller

Entretanto, o “custo” de usar o fluxo de Teichmüller para encolher $\ell_t^\theta(x)$ é que deformamos a superfície inicial M_0 (especialmente na horizontal, onde dilatamos por e^s) numa superfície $M_s = g_s M_0$.

Recorrência do fluxo de Teichmüller

Entretanto, o “custo” de usar o fluxo de Teichmüller para encolher $\ell_t^\theta(x)$ é que deformamos a superfície inicial M_0 (especialmente na horizontal, onde dilatamos por e^s) numa superfície $M_s = g_s M_0$.

Em princípio, apenas “trocamos o problema de lugar”. Mas, de fato, ganhamos alguma informação: o fluxo de Teichmüller possui boas propriedades de *recorrência*, ou seja, de tempos em tempos encontramos *praticamente* a mesma superfície.

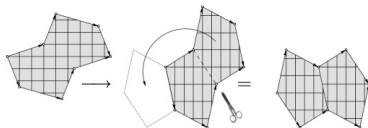


Figura: Recorrência do fluxo de Teichmüller.

Reformulando o estudo de interseções algébricas

Em outras palavras, o uso do fluxo de Teichmüller em tempos adequados permite pensar ℓ_t^θ como um segmento de tamanho 1 em M_S , uma superfície *essencialmente* igual à superfície inicial M_0 .

Reformulando o estudo de interseções algébricas

Em outras palavras, o uso do fluxo de Teichmüller em tempos adequados permite pensar ℓ_t^θ como um segmento de tamanho 1 em M_s , uma superfície *essencialmente* igual à superfície inicial M_0 .

Porém, o efeito de cortar e colar M_s para “reconhecer” a superfície inicial M_0 força a troca da classe f por uma classe $B_s f$, onde B_s é a matriz associada a ação na homologia do elemento do grupo modular usado para cortar e colar.

Definição do cociclo KZ e sua symplecticidade

Na literatura, a família de matrizes B_s obtidas acima é conhecida como *cociclo de Kontsevich-Zorich* (cociclo KZ). Como a ação na homologia de um homeomorfismo (elemento do grupo modular) preserva a forma de interseção $\langle \cdot, \cdot \rangle$, uma forma *simplética*, segue que o cociclo KZ é simplético (de maneira que o espectro de Lyapunov é determinado pela parte não-negativa).

Pequeno detalhe técnico

A preservação de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *moralmente* implica

$$\langle f, \ell_t^\theta(x) \rangle = \langle B_s f, \ell_1^\theta(x) \rangle$$

Observação

Na verdade, a igualdade acima não é completamente verdadeira (porque o pequeno segmento usado para fechar o segmento $[x, \phi_t^\theta(x)]$ afeta *um pouco* a igualdade). Entretanto, esse detalhe é puramente técnico e iremos esquecê-lo.

Difusão, expoentes e mudança no “tempo”

A discussão até agora pode ser resumida assim: entender a velocidade de difusão corresponde a estudar $\langle f, \ell_t^\theta(x) \rangle$, ou, de maneira “equivalente”, a calcular o tamanho de $\langle B_s f, \ell_1^\theta(x) \rangle$, onde $t = e^s$. Por outro lado, a teoria ergódica (e, em particular, o teorema de Oseledets) diz que o tamanho de $B_s f$ é medido pelos expoentes de Lyapunov do cociclo KZ, i.e., $B_s f$ tem tamanho $\sim e^{\lambda s} = t^\lambda$ para algum expoente de Lyapunov λ de B_s .

Calculando os expoentes

Felizmente, quando o gênero é *baixo* ou em situações muito *simétricas*, os expoentes do cociclo KZ podem ser calculados.

Calculando os expoentes

Felizmente, quando o gênero é *baixo* ou em situações muito *simétricas*, os expoentes do cociclo KZ podem ser calculados.

Para ver como isso funciona, observamos que $X(a, b)$ possui um grupo de simetrias $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (grupo de Klein) gerado por uma translação horizontal τ_h e uma translação vertical τ_v .

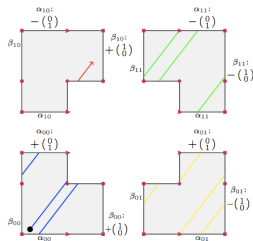


Figura: Superfície de translação $X(a, b)$ e suas simetrias.

Diagonalização por blocos

Como τ_h e τ_v são involuções, podemos decompor $H_1(X(a, b), \mathbb{R}) = E^{++} \oplus E^{+-} \oplus E^{-+} \oplus E^{--}$, onde E^{++} é o espaço de vetores invariantes por τ_h e τ_v , E^{+-} é o espaço de vetores τ_h -invariantes e τ_v -anti-invariantes, etc.

Diagonalização por blocos

Como τ_h e τ_v são involuções, podemos decompor $H_1(X(a, b), \mathbb{R}) = E^{++} \oplus E^{+-} \oplus E^{-+} \oplus E^{--}$, onde E^{++} é o espaço de vetores invariantes por τ_h e τ_v , E^{+-} é o espaço de vetores τ_h -invariantes e τ_v -anti-invariantes, etc.

Com isso, podemos analisar o cociclo KZ em cada bloco E^{++} , E^{+-} , E^{-+} e E^{--} individualmente, i.e., o cociclo KZ é diagonal por blocos (com 4 blocos).

Estudo do bloco E^{++}

O bloco E^{++} é uma cópia do cociclo KZ da superfície $L(a, b)$ (em L , de gênero 2, em $\mathcal{H}(2)$). Por um resultado de C. McMullen e K. Calta (classificação tipo Ratner), as órbitas de $SL(2, \mathbb{R})$ em $\mathcal{H}(2)$ são:

- densas (caso genérico)
- Veech não aritmético: $\frac{1}{1-a} = x + y\sqrt{D}$, $\frac{1}{1-b} = (1-x) + y\sqrt{D}$
- Veech aritmético (quadriculado): $a, b \in \mathbb{Q}$

Mais ainda, M. Bainbridge mostrou que em todos esses casos, os expoentes do cociclo KZ em $\mathcal{H}(2)$ são 1 e $1/3$, ou seja, E^{++} contribui com expoentes 1 e $1/3$.

Estudo dos blocos E^{+-} e E^{-+}

Os blocos $E^{++} + E^{+-}$ e $E^{++} + E^{-+}$ são cópias do cociclo KZ das superfícies $X(a, b)/\tau_h$ e $X(a, b)/\tau_v$, as quais estão no *locus hiperelíptico do estrato* $\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$ (de gênero 3). Por um trabalho de Eskin, Kontsevich, Zorich, segue que a soma dos expoentes de Lyapunov em $E^{++} + E^{+-}$ e $E^{++} + E^{-+}$ é 2. Como E^{++} contribui com os expoentes 1 e $1/3$, segue E^{+-} e E^{-+} contribuem com expoentes $\lambda^{+-} = 2/3$ e $\lambda^{-+} = 2/3$, resp.

Estudo do bloco E^{--}

O bloco $E^{++} + E^{--}$ é cópia do cociclo KZ da superfície $X(a, b)/\tau_h\tau_v$, uma superfície em $\mathcal{H}^{hyp}(2, 2)$. Por um trabalho de Eskin, Kontsevich, Zorich, segue que a soma dos expoentes de Lyapunov em $E^{++} + E^{--}$ é $5/3$. Como E^{++} contribui com 1 e $1/3$, E^{--} contribui com o expoente $\lambda^{--} = 1/3$.

Fim do argumento

Para finalizar o argumento, uma verificação direta mostra que $f \in E^{+-} + E^{-+}$, de maneira que o expoente de Lyapunov associado ao crescimento de $B_S f$ (e, portanto, a velocidade de difusão) é $2/3$, como queríamos demonstrar.

Difusão ainda mais rápida

Recentemente, V. Delecroix encontrou o seguinte argumento para obter exemplos onde a difusão é $> 2/3$: trocando \mathbb{Z}^2 por Λ , guardamos apenas *uma* das simetrias, digamos τ_h .

Difusão ainda mais rápida

Recentemente, V. Delecroix encontrou o seguinte argumento para obter exemplos onde a difusão é $> 2/3$: trocando \mathbb{Z}^2 por Λ , guardamos apenas *uma* das simetrias, digamos τ_h .

Nesse caso, os blocos ficam maiores de maneira que, com os trabalhos de Eskin, Kontsevich, Zorich, determinamos apenas o valor da *soma* ($4/3$) dos expoentes no pedaço da homologia que nos interessa. Para ver que o maior expoente nesse bloco é $> 2/3$, Vincent utiliza um *critério de simplicidade* dos expoentes de Lyapunov para superfícies quadriculadas (recentemente desenvolvido por M., Martin Möller e Jean-Christophe Yoccoz).

Para os interessados, estes slides estarão disponíveis

- na minha página pessoal (<http://wwwimpa.br/~cmateus>) na seção “Notas de seminários” e
- no meu blog *em português* (<http://cmssmateus.wordpress.com/>).

Além disso, uma versão em inglês mais detalhada dessa discussão vai aparecer no meu blog (<http://matheuscmss.wordpress.com/>).

Obrigado!