

Enunciados de resultados

Luiz A. B. San Martin



Conjuntos de Controle Invariantes em Flags

- ▶ G grupo **semi-simples** de centro finito e $S \subset G$ subsemigrupo com

$$\text{int}S \neq \emptyset.$$

Conjuntos de Controle Invariantes em Flags

- ▶ G grupo **semi-simples** de centro finito e $S \subset G$ subsemigrupo com

$$\text{int}S \neq \emptyset.$$

- ▶ Em qualquer variedade flag \mathbb{F}_H existe um **único** conjunto de controle **invariante** C_H (único conjunto de controle **minimal** também, invariante por S^{-1}).

Conjuntos de Controle Invariantes em Flags

- ▶ G grupo **semi-simples** de centro finito e $S \subset G$ subsemigrupo com

$$\text{int}S \neq \emptyset.$$

- ▶ Em qualquer variedade flag \mathbb{F}_H existe um **único** conjunto de controle **invariante** C_H (único conjunto de controle **minimal** também, invariante por S^{-1}).
- ▶ Se $h \in \text{int}S$ é **regular** então então o atrator de h pertence ao interior de C_H .
Reciprocamente: o conjunto dos atratores é denso em C_H .

Contagem dos conjuntos de controle

- ▶ Os conjuntos de controle num flag \mathbb{F}_H são **projeções** dos conjuntos de controle no flag maximal \mathbb{F}_{\max} .

Contagem dos conjuntos de controle

- ▶ Os conjuntos de controle num flag \mathbb{F}_H são **projeções** dos conjuntos de controle no flag maximal \mathbb{F}_{\max} .
- ▶ Para cada elemento w do grupo de Weyl \mathcal{W} existe um conjunto de controle D_w . D_1 é o único invariante.

Contagem dos conjuntos de controle

- ▶ Os conjuntos de controle num flag \mathbb{F}_H são **projeções** dos conjuntos de controle no flag maximal \mathbb{F}_{\max} .
- ▶ Para cada elemento w do grupo de Weyl \mathcal{W} existe um conjunto de controle D_w . D_1 é o único invariante.
- ▶ No flag *maximal*: o conjunto

$$\mathcal{W}_S = \{w \in \mathcal{W} : D_w = D_1 \quad (\text{invariante})\}$$

é **subgrupo** (parabólico).

Contagem dos conjuntos de controle

- ▶ Os conjuntos de controle num flag \mathbb{F}_H são **projeções** dos conjuntos de controle no flag maximal \mathbb{F}_{\max} .
- ▶ Para cada elemento w do grupo de Weyl \mathcal{W} existe um conjunto de controle D_w . D_1 é o único invariante.
- ▶ No flag *maximal*: o conjunto

$$\mathcal{W}_S = \{w \in \mathcal{W} : D_w = D_1 \quad (\text{invariante})\}$$

é **subgrupo** (parabólico).

- ▶ No flag *maximal*: $D_w = D_{w_1}$ se, e só se, $\mathcal{W}_S w = \mathcal{W}_S w_1$ (classes laterais).

Contagem

- ▶ Quantidade de conjuntos de controle em \mathbb{F}_{\max} :
 $|\mathcal{W}_S \setminus \mathcal{W}| = |\mathcal{W}|/|\mathcal{W}_S|.$

Contagem

- ▶ Quantidade de conjuntos de controle em \mathbb{F}_{\max} :
 $|\mathcal{W}_S \setminus \mathcal{W}| = |\mathcal{W}|/|\mathcal{W}_S|.$
- ▶ A ordem entre os conjuntos de controle D_w é dada pela ordem de Bruhat-Chevalley (definida algebricamente).

Contagem

- ▶ Quantidade de conjuntos de controle em \mathbb{F}_{\max} :
 $|\mathcal{W}_S \setminus \mathcal{W}| = |\mathcal{W}| / |\mathcal{W}_S|.$
- ▶ A ordem entre os conjuntos de controle D_w é dada pela ordem de Bruhat-Chevalley (definida algebricamente).
- ▶ $\mathcal{W}_S = \mathcal{W} \iff$
existe um único conjunto de controle em $\mathbb{F}_{\max} \iff$
 S transitivo em $\mathbb{F}_{\max} \iff$
 $S = G.$

Flag característico - tipo parabólico

- ▶ Os semigrupos são classificados de acordo com a geometria dos seus conjuntos de controle invariante no flag maximal.

Flag característico - tipo parabólico

- ▶ Os semigrupos são classificados de acordo com a geometria dos seus conjuntos de controle invariante no flag maximal.
- ▶ Existe um (único) flag $\mathbb{F}_{H(S)}$ (dependendo de S) tal que
 - ▶ $C_{\max} = \pi^{-1}(C_{H(S)})$.
 - ▶ $C_{H(S)}$ é “contrátil” (contido em célula aberta de Bruhat).

Flag característico - tipo parabólico

- ▶ Os semigrupos são classificados de acordo com a geometria dos seus conjuntos de controle invariante no flag maximal.
- ▶ Existe um (único) flag $\mathbb{F}_{H(S)}$ (dependendo de S) tal que
 - ▶ $C_{\max} = \pi^{-1}(C_{H(S)})$.
 - ▶ $C_{H(S)}$ é “contrátil” (contido em célula aberta de Bruhat).
- ▶ $H(S)$ é ponto fixo de \mathcal{W}_S : $wH(S) = H(S)$ para todo $w \in \mathcal{W}_S$

Decomposições de Jordan

- ▶ Seja $H(S)$ o elemento que determina o flag característico.

Decomposições de Jordan

- ▶ Seja $H(S)$ o elemento que determina o flag característico.
- ▶ Se $g \in \text{int}S$ então os blocos de Jordan de g estão contidos nos blocos de $H(S)$.

Decomposições de Jordan

- ▶ Seja $H(S)$ o elemento que determina o flag característico.
- ▶ Se $g \in \text{int}S$ então os blocos de Jordan de g estão contidos nos blocos de $H(S)$.
- ▶ **Exemplo:** $S = \{g = (g_{ij}) \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}) : g_{ij} \geq 0\}$.
 $H(S) = \text{diag}\{a_1 > a_2 = \dots = a_n\}$
Toda matriz estritamente positiva tem um auto-valor principal.

Referências

- ▶ — : *Invariant control sets on flag manifolds*. Mathematics of Control, Signals, and Systems **6** (1993), 41-61.
- ▶ — , P. A. Tonelli: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum **50** (1995), 59-88.

Aplicações a cociclos

- ▶ Braga Barros, C.J., — : *Chain transitive sets for flows on flag bundles*. Forum Math., **19** (2007), 19-60.
- ▶ Patrão, M., — : *Chain recurrence of flows and semiflows on fiber bundles*. Discrete Contin. Dynam. Systems A, **17** (2007), 113-139.
- ▶ Patrão, M., — , L. Seco: *Conley index and stable sets for flows on flag bundles*. Dynamical Systems.
- ▶ Patrão, M., —: *Chain recurrence of flows and semiflows on fiber bundles*. Discrete Contin. Dyn. Syst., **17**, 113-139 (2007).
- ▶ —, Seco, L.: *Morse and Lyapunov Spectra and Dynamics on Flag Bundles*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 30, 893-922, (2009).

Outros artigos sobre semigrupos

- ▶ — : Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces. *Math. Ann.*, **321** (2001), 587-600.
- ▶ — : Homogeneous spaces admitting transitive semigroups. *J. of Lie Theory*, **8** (1998), 111-128.
- ▶ — , A. J. Santana: The homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups. *Monatsh. Math.*, **136**, 2 (2002) 151-173.