Padrões assintóticos na dinâmica de autômatos celulares

MARCELO SOBOTTKA

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

EDAÍ - 3 DE SETEMBRO DE 2010

1 Introdução

- O conceito de autômato celular foi introduzido nos anos cinqüenta por von Neumann;

- tem sido estudado como objeto matemático e aplicado para resolver diversos problemas da física, biologia, computação, etc.;

- Como objeto matemático, os autômatos celulares são sistemas dinâmicos simbólicos.

Sendo um sistema dinâmico, seu estudo se faz basicamente baixo dois pontos de vista:

- **Topológico:** dinâmica topológica e recodificação;

- **Probabilístico:** dinâmica abstrata;

evolução de medidas de distribuição iniciais através da dinâmica do autômato celular.

1.1 Dinâmica simbólica

ESPAÇOS *SHIFT*

- Seja $\mathcal{A}$ um conjunto finito com q elementos (**alfabeto**)

- Seja $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o **full shift** sobre $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \quad x_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$,

- Consideramos em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ a topologia dos **cilindros**: Para $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ e $a_0, a_1 \dots, a_n \in \mathcal{A}$, definimos:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n]_j := \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \quad x_{i+j} = a_i, \quad 0 \le i \le n\}.$$

- seja $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ o SDT no qual $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é o **mapa shift**:

$$\sigma\big((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

- Dizemos que $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um **espaço shift** se Λ é um conjunto fechado e σ-invariante, isto é, se $\sigma(\Lambda) = \Lambda$.

- Se Λ é um espaço *shift*, então (Λ, σ) é também um SDT.

CÓDIGOS DE BLOCO

- Sejam $\Lambda_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e $\Lambda_G \subseteq G^{\mathbb{Z}}$ dois espaços *shift*.

- $\mathbf{f} : \Lambda_{\mathcal{A}} \to \Lambda_G$ é dita um **código** k**-bloco** se existem $\ell, r \geq 0$, com $k = \ell + r + 1$, e $f : \mathcal{A}^k \to G$ tais que

$$\begin{array}{rcccccccc} \mathbf{x} = (& \ldots & , & \boxed{x_{j-\ell}, \ldots, x_j \ldots, x_{j+r}} & , & \ldots &) \\ & & & \big\downarrow f & & & \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (& \ldots & , & \big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)_j & , & \ldots &) \end{array}$$

Nesse caso, dizemos que $\mathbf{f}$ tem memória ℓ e antecipação r.

- Equivalentemente **f é contínua e** $\mathbf{f} \circ \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} = \sigma_{G^{\mathbb{Z}}} \circ \mathbf{f}$.

AUTÔMATOS CELULARES (A.C.)

Um A.C. é uma dupla (Λ, Φ), onde

$$\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \text{ é um espaço } \textit{shift}$$

e

$$\Phi : \Lambda \to \Lambda \text{ um código de bloco.}$$

EVOLUÇÃO DE MEDIDAS INICIAIS:

- dado um autômato celular (X, Φ)

- e uma medida de probabilidade μ sobre os Borelianos de X;

- como μ evolui baixo a dinâmica de Φ ?

Isto é, a medida $\mu \circ \Phi^{-n}$ converge a uma medida estacionária quando n cresce ao infinito?

Ou a distribuição em média de Cesàro $N^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \Phi^{-n}$ converge quando N vai a infinito?

AUTÔMATOS CELULARES ALGÉBRICOS:

A regra local é dada por alguma operação algébrica sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Por exemplo, suponhamos que $\bullet$ é uma operação de grupo sobre $\mathcal{A}$ e $\Phi : \Lambda \to \Lambda$ com regra local $\phi : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ definida por

$$\phi(x_0, x_1) = \eta(x_0) \bullet \rho(x_1) \bullet c,$$

onde $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ são endomorfismos e $c \in \mathcal{A}$.

2 O caso mais simples

- Consideramos em $\{0,1\}$ a operação de soma módulo 2, isto é, consideramos o **grupo cíclico** $\mathbb{Z}_2 := (\{0,1\},+)$;

- a operação $+$ sobre o alfabeto $\{0,1\}$ induz o grupo *shift*

$$(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}} := (\{0,1\}^{\mathbb{Z}},+);$$

- consideraremos o autômato celular $\Phi : (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}} \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$ cuja regra local é

$$\phi(a,b) = a+b, \qquad \forall a,b \in \mathbf{A}.$$

- Seja μ a medida de Bernoulli sobre $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$, definida por

$$\mu\Big([0]_i\Big) = p \qquad \text{e} \qquad \mu\Big([1]_i\Big) = 1 - p.$$

- Existe (e qual é) o limite de $\mu \circ \Phi^{-n}$ quando n vai a infinito?

De fato, a i-ésima coordenada da sequência $\Phi^n(\mathbf{x})$ é dada pela expressão:

$$\big(\Phi^n(\mathbf{x})\big)_i = \begin{cases} x_i + x_{i+n}, & se\ n = 2^k \\ \\ (x_i + x_{i+n}) + (x_{i+1} + x_{i+n+1}), & se\ n = 2^k + 1, \end{cases} \tag{1}$$

e logo

$$\mu \circ \Phi^{-n}\big([0]_i\big) = \begin{cases} p^2 + (1-p)^2, & se\ n = 2^k \\ \\ p^4 + (1-p)^4 + 6p^2(1-p)^2, & se\ n = 2^k + 1. \end{cases} \tag{2}$$

Daí se $p \neq 0,\ 1/2,\ 1$, então $\mu \circ \Phi^{-n}\big([0]_i\big)$ terá valores distintos e fixos que dependem de n, não podendo existir o limite.

Examinemos um tipo mais fraco de convergência, que é, **o limite em média de Cesàro** da distribuição inicial pela ação do autômato celular:

Teorema 2.1. *Se* μ *é uma medida de Bernoulli sobre* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *e* $((\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}, \Phi)$ *é um autômato celular de grupo, então*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu \circ \Phi^{-n} \xrightarrow[N\to\infty]{} \nu,$$

onde ν *é a medida uniforme de Bernoulli.*

Demonstração. USA ANÁLISE HARMÔNICA

- seja $\mathfrak{G}$ o **grupo característico** de $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$, o qual consiste no subgrupo Abeliano e contável de $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$ definido por:

$$\mathfrak{G} := \left\{ \mathbf{g} = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i < \infty \right\}.$$

- dado $\mathbf{g} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, definimos o rango de $\mathbf{g}$, como $r(\mathbf{g}) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i$.

O grupo característico pode ser interpretado como o dual de $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$ e podemos definir para $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ e $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ o produto dualidade

$$< \mathbf{g}, \mathbf{x} > := \mathbf{g}(\mathbf{x}) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - 2x_i)^{g_i}.$$

Podemos considerar a restrição de Φ sobre $\mathfrak{G}$, a qual continuaremos denotando por Φ e pode ser interpretada como o endomorfismo dual.

Dada uma medida μ sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, a sua tranformada de Fourier será dada para $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ por

$$\hat{\mu}(\mathbf{g}) := \int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) d_{\mu}(\mathbf{x}).$$

É bem conhecido que uma sucessão de medidas de probabilidade

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a uma medida de probabilidade ν

se somente se

a sucessão formada por suas respectivas transformadas de Fourier

$(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente a uma função definida positiva $\hat{\nu}$ com $\hat{\nu}(0) = 1$.

Em tal caso $\hat{\nu}$ é a tranformada de Fourier de ν.

Dado $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ distinto do elemento neutro, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(\mathbf{g}) &= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) d_{\mu}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{i:\ g_i=1} \sum_{a=0}^{1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mu\{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : x_i = a\} \\
&= \sum_{i:\ g_i=1} \sum_{a=0}^{1} \left(\prod_{j\in\mathbb{Z}} (1-2a)^{g_j} \right) \mu\{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : x_i = a\} \\
&= \sum_{k=0}^{r(\mathbf{g})} (-1)^k \binom{r(\mathbf{g})}{k} p^k (1-p)^{r(\mathbf{g})-k} = (1-2p)^{r(\mathbf{g})},
\end{aligned} \tag{3}$$

A equação anterior implica que se μ é a medida uniforme de Bernoulli (isto é, $p = 1/2$), então $\hat{\mu}(\mathbf{g}) = 0$ para $\mathbf{g}$ distinto do elemento neutro.

Por outro lado, se $\hat{\mu}(\mathbf{g}) = 0$ para $\mathbf{g}$ distinto do elemento neutro e $\hat{\mu}(0_{\mathfrak{G}}) = 1$, então μ é a medida uniforme de Bernoulli.

Dado $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ distinto do elemento neutro e dado $M > 0$, se tem que

$$\frac{1}{N} |n \leq N : \ r(\Phi^n(\mathbf{g})) \leq M| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Ademais, dado $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ segue que para todo $M > 0$ se tem

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{g}))\right| \leq \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{g}))| \\
=_{eq.(\mathbf{3})} \quad & \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|1-2p|^{r(\Phi^n(\mathbf{g}))} \\
= \quad & \frac{1}{N}\sum_{n:\ r(\Phi^n(\mathbf{g}))\leq M}|1-2p|^{r(\Phi^n(\mathbf{g}))} \\
& +\frac{1}{N}\sum_{n:\ r(\Phi^n(\mathbf{g}))>M}|1-2p|^{r(\Phi^n(\mathbf{g}))} \\
\leq \quad & \frac{1}{N}\sum_{n:\ r(\Phi^n(\mathbf{g}))\leq M} 1 \\
& +\frac{1}{N}\sum_{n:\ r(\Phi^n(\mathbf{g}))>M}|1-2p|^{M}
\end{aligned}
$$

Usando a equação acima e a equação (4), obtemos que

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{g}))\right| \leq |1-2p|^M \qquad para\ todo\ M > 0.$$

Logo,

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{g}))\right| = 0$$

e daí se deduz que

$$\hat{\nu}(\mathbf{g}) := \lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{g}))\right| = 0.$$

Para finalizar, vemos que para todo $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ se tem

$$\mathbf{0}_{\mathfrak{G}}(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} (1 - 2x_i)^0 = 1,$$

e logo

$$\hat{\mu}(\mathbf{0}_{\mathfrak{G}}) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} \mathbf{0}_{\mathfrak{G}}(\mathbf{x}) d_\mu(\mathbf{x}) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} 1 d_\mu(\mathbf{x}) = 1.$$

Como $\Phi^n(\mathbf{0}_{\mathfrak{G}}) = \mathbf{0}_{\mathfrak{G}}$, segue que $\hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{0}_{\mathfrak{G}})) = 1$ e portanto

$$\hat{\nu}(\mathbf{0}_{\mathfrak{G}}) := \lim_{N \to \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \hat{\mu}(\Phi^n(\mathbf{0}_{\mathfrak{G}})) \right| = 1.$$

Daí concluímos que a medida uniforme Bernoulli ν é o limite da média de Cesàro da medida μ. $\square$

Espaço	Regra	Medida	Método	Refer.
$(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$	Grupo	Bernoulli	An. Harm.	Lind
$(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$	Grupo	Markov	An. Harm.	Ferrari-Maass-Martínez
$(\mathbb{Z}_{p^s})^{\mathbb{Z}}$	Linear	Dec. Somável	Teo. de Regen.	Ferrari-Maass-Martínez-Ney
$(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{m_i})^{\mathbb{Z}}$	Difusivo	Harm. mesc.	An. Harm.	Pivato-Yassawi (2)
$(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{m_i})^{\mathbb{Z}}$	Afim	Dec. Somável	An. Harm.	Host-Maass-Martínez
$\Sigma_{\mathbf{A}} \subseteq (\bigoplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}_{p^i})^{n_i})^{\mathbb{Z}^d}$	Linear	Markov	Teo. de Regen.	Maass-Martínez-Pivato-Yassawi(2)
$\Sigma_{\mathbf{A}} \subseteq (\bigoplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}_{p^i})^{n_i})^{\mathbb{Z}}$	Afim	Dec. Somável	Teo. de Regen.	Maass-Martínez-Sobottka
$\Sigma_{\mathbf{A}} \subseteq (\bigoplus_{i=1}^{s} (\mathbb{Z}_{p^i})^{n_i})^{\mathbb{Z}}$	Estrut. Compat.	Dec. Somável	Conjug. em Medida	Sobottka

EXEMPLOS DE AUTÔMATOS CELULARES ALGÉBRICOS:

$$\phi(x_0, x_1) = \eta(x_0) \bullet \rho(x_1) \bullet c$$

Os autômatos algébricos da forma anterior para uma operação $\bullet$ de grupo, são bipermutativos e classificados como segue:

- se $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ são automorfismos que comutam, isto é, $\eta \circ \rho = \rho \circ \eta$, então dizemos que Φ é um *a.c. afim*;

- se $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ são automorfismos que comutam e $c = 0_{\mathcal{A}}$ (isto é, c é o elemento neutro do grupo $(\mathcal{A}, \bullet)$), então Φ recebe o nome de *a.c. linear*;

- se $\eta = \rho = id$ e $c = 0_{\mathcal{A}}$, então dizemos que Φ é um *a.c. de grupo*.

MEDIDAS DE PROBABILIDADE SOBRE OS ESPAÇOS *SHIFT*

Dado um espaço *shift* $\Lambda \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, podemos considerar uma medida μ sobre os Borelianos de Λ e invariantes pelo mapa *shift*. Por exemplo, quando $\Lambda = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, podemos definir:

- **Medidas de Bernoulli:** definida por um vetor $p = (p_i)_{i \in \mathcal{A}}$ com $p_i \geq 0$ para todo $i \in \mathcal{A}$ e $\sum_{i \in \mathcal{A}} p_i = 1$, tal que para todo cilindro $[a_0, a_1, \dots, a_n]_j$ se tem

$$\mu\Big([a_0, a_1, \dots, a_n]_j\Big) = p_{a_0} p_{a_1} \cdots p_{a_n}.$$

Quando $p_i = 1/\left|\mathcal{A}\right|$ para todo $i \in \mathcal{A}$, dizemos que μ é a medida uniforme de Bernoulli.

- **Medidas de Markov:** definida por um vetor de distribuição $p = (p_i)_{i\in\mathcal{A}}$ e por uma matriz estocástica $P = (P_{ij})_{i,j\in\mathcal{A}}$, verificando para todo cilindro

$$\mu\Big([a_0, a_1, \ldots, a_n]_j\Big) = p_{a_0} P_{a_0 a_1} P_{a_1 a_2} \cdots P_{a_{n-1} a_n}.$$

Note que o suporte de uma medida de Markov é justamente uma cadeia de Markov topológica. Assim, é equivalente (desde o ponto de vista da dinâmica abstrata) considerar medidas de Markov definidas sobre *full shifts* ou sobre a cadeia de Markov topológica que a suporta. Observe que, por definição, medidas de Bernoulli e medidas de Markov são medidas invariantes pelo mapa *shift*.

- **Medidas com conexões completas e decaimento somável:** é uma medida invariante pelo mapa *shift*a qual possui as seguintes propriedades:

Se $\mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$ é a projeção de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sobre as coordenadas negativas e para cada $w \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$ consideramos o espaço Σ_w^+ definido como a projeção do conjunto $\{(g_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \; g_i = w_i, i \leq -1\}$ sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,

então podemos definir uma medida de probabilidade μ_w sobre Σ_w^+, condicionando μ ao passado w.

Daí, dizemos que μ tem **conexões completas** se para todo $a \in \mathcal{A}$ e $w \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$ se tem $\mu_w(a) := \mu_w([a]_0) > 0$.

Se ademais, as quantidades γ_m, definidas para $m \geq 1$ por

$$\gamma_m := \sup \left\{ \left| \frac{\mu_v(a)}{\mu_w(a)} - 1 \right| : \begin{array}{l} v, w \in \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}; \\ v_{-i} = w_{-i},\ 1 \leq i \leq m; \\ a \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \end{array} \right\}, \tag{5}$$

são tais que $\sum_{m \geq 1} \gamma_m < \infty$, então dizemos que μ **tem decaimento somável**.