

## A GEOMETRIA DOS RASTROS DE BICICLETA

**Alunos: Leonardo Lobo da Cunha da Fontoura, Frederico Banchik Israel**  
**Orientador: Jairo da Silva Bochi**

### Introdução

Qual a relação entre os rastros dos pneus de uma bicicleta? Conhecido o rastro de trás (e o comprimento da bicicleta), é trivial determinar o rastro da frente. O problema inverso é mais interessante e recai em resolver uma equação diferencial ordinária (EDO). Essa equação é não-linear e geralmente não pode ser resolvida analiticamente. Por outro lado, a equação tem propriedades muito interessantes. Uma delas, descoberta por Foote [2], é que as aplicações de monodromia são transformações de Möbius.

Neste trabalho realizamos um estudo teórico dos rastros de bicicleta e de suas propriedades, e paralelamente desenvolvemos um programa em Java que realiza simulações, dando resultados gráficos e numéricos.

### Relacionando os dois rastros

Duas observações servem de ponto de partida:

1. O corpo da bicicleta é sempre tangente à curva formada pelo rastro da roda de trás;
2. O comprimento da bicicleta é uma constante, digamos  $l$ .

Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  curvas parametrizadas pelo tempo  $t$  no plano  $\mathbf{R}^2$  que descrevem as posições da roda da frente e da roda de trás, respectivamente. Então as observações acima se expressam assim:

1. O vetor  $f(t) - g(t)$  é paralelo a  $g'(t)$ .
2. O vetor  $f(t) - g(t)$  tem comprimento constante  $l$ .

Conhecidos o comprimento  $l$  da bicicleta e o rastro da roda de trás  $g(t)$ , o rastro da roda da frente é simplesmente:  $f(t) = g(t) + l \cdot g'(t) / |g'(t)|$ . O problema inverso, encontrar  $g(t)$  a partir de  $f(t)$ , é mais complexo. Como não deve ser uma surpresa, a resposta será encontrada como solução de uma equação diferencial.

Para começar, observamos que se só estamos interessados nos rastros em si, a velocidade do ciclista é irrelevante. Assim, podemos reparametrizar as curvas para  $f(s)$  e  $g(s)$  de modo que a primeira seja parametrizada por comprimento de arco.

Sejam  $\theta(s)$  e  $\psi(s)$  os ângulos que fazem respectivamente os vetores  $f'(s)$  e  $g'(s)$  com o vetor horizontal constante  $(1,0)$ . Nosso problema fica sendo encontrar  $\psi(s)$  uma vez conhecido  $\theta(s)$ . Pode-se mostrar que vale a seguinte equação diferencial:

$$\psi'(s) = l^{-1} \sin[\theta(s) - \psi(s)]$$

É conveniente expressar esta equação de maneira mais intrínseca. Seja  $\alpha(s) = \theta(s) - \psi(s)$  o ângulo formado pelo guidão com o corpo da bicicleta, e seja  $k(s) = \theta'(s)$  a curvatura (com sinal) da curva da roda da frente. Então a EDO se torna:

$$\alpha'(s) = k(s) - l^{-1} \sin \alpha(s)$$

Em geral não é possível encontrar fórmulas explícitas para as soluções desta EDO, exceto em casos muito particulares, como quando a roda da frente percorre uma reta (caso considerado por Newton, onde a roda de trás percorre uma curva conhecida como *tractriz*) ou um círculo (caso considerado por Euler, ver [1]). No caso em que a bicicleta percorre uma trajetória aproximadamente reta, podemos aproximar o  $\sin x$  na EDO por  $x$ , obtendo assim

uma EDO linear. Neste caso, usando análise de Fourier é possível descrever como oscilações (pequenas) da roda da frente induzem oscilações da roda de trás.

Outras observações interessantes são: a velocidade escalar da roda de trás é dada por  $|\cos \alpha(s)|$ ; a curvatura do rastro de trás é  $l^{-1} \tan \alpha(s)$ . Em particular, quando o guidão está a 90 graus, a roda de trás está instantaneamente parada e o seu rastro tem curvatura infinita – este pode ser um ponto tipo *cusp*.

## Monodromia

Vamos agora abordar um problema diferente: Suponha dado um trecho do rastro da roda da frente, digamos  $f(s)$  para  $s$  entre  $s_0$  e  $s_1$ . Sabendo a posição inicial  $g(s_0)$  da roda de trás, podemos calcular a sua posição final  $g(s_1)$ . Fazendo uma mudança de coordenadas simples, podemos considerar essas posições inicial e final como pontos no círculo unitário. A aplicação do círculo no círculo assim obtida é chamada *aplicação de monodromia*.

Foote [2] descobriu que essa aplicação de monodromia é uma *transformação de Möbius* (ou, mais precisamente, a restrição de uma transformação de Möbius ao círculo unitário).

Vamos explicar como esta transformação pode ser encontrada. Dado o trecho de rastro da roda da frente, determine as funções ângulo  $\theta(s)$  e curvatura  $k(s)$ . A seguir, defina a função matricial:

$$A(s) = \begin{pmatrix} ik(s) & \frac{e^{i\theta(s)}}{2l} \\ \frac{e^{-i\theta(s)}}{2l} & -ik(s) \end{pmatrix}$$

Esta é uma família a um parâmetro de matrizes em  $\mathfrak{su}(1,1)$ , a álgebra de Lie do grupo  $SU(1,1)$ . Considere a equação diferencial matricial  $M'(s) = A(s)M(s)$ , com condição inicial  $M(s_0) = \text{Id}$ . Então a solução  $M(s)$  deste PVI é uma curva no grupo  $SU(1,1)$ . Considere a transformação de Möbius  $F(z)$  associada à matriz  $M(s_1)$ :

$$M(s_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Como a matriz está em  $SU(1,1)$ , a transformação  $F(z)$  preserva o círculo unitário em  $\mathbb{C}$ . Pode-se provar que esta é exatamente a transformação de monodromia.

No caso em que a roda da frente percorre uma curva fechada, é natural classificar a transformação de monodromia em um dos tipos: *elíptico*, *parabólico* ou *hiperbólico*. Levi e Tabachnikov [3] demonstraram que se a curva da roda da frente é convexa e delimita uma área maior que  $\pi l^2$  então a monodromia é hiperbólica. Isto demonstra (no caso convexo) uma conjectura feita por A. L. Menzin em 1906. Na verdade Menzin não estava interessado em bicicletas, mas em um instrumento mecânico chamado *planímetro de Pritz*, que obedece à mesma matemática que a bicicleta.

## Referências

- 1- CADY, W.G. The circular tractrix. **American Mathematical Monthly**, v. 72, n. 10, p. 1065-1071, 1965.
- 2 - FOOTE, Robert L. Geometry of the Pritz planimeter. **Reports on Mathematical Physics.**, v. 42, n. 1/2, p. 249-271, 1998.
- 3 - LEVI, Mark; TABACHNIKOV, Serge. On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks. **Experimental Mathematics**, v.18, n. 2, p. 173-186, 2009.