CONTROLE ÓTIMO

Aluno: João Pedro T. Brandão
Orientador: Alex Castro

Introdução

Este trabalho faz um estudo sobre métodos de otimização, começando com métodos básicos e incrementando aspectos que o tornam mais complexos a fim de poder generalizar e resolver sistemas de equações não lineares.

Método de Newton em 1 Dimensão

O método visa resolver equações do tipo $f(x) = 0$. Dado uma função derivável, e uma estimativa inicial x_0, determinamos os demais valores, x_i, quando a tangente de f em x_{i-1} intercepta o eixo x. Iteramos o algoritmo até que a distancia entre x_i e x_{i-1} seja pequena suficiente. Segue que $|f(x_i)| < \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$, é o erro aceitável, nesse caso seria 10^{-4}.

O método de Newton, quando converge, converge rápido para a solução. Há, no entanto, casos em que o método não converge. Se a tangente da função, f, em alguma iteração, x_i, for paralela ao eixo x, fica evidente que a tangente nunca irá se interceptar com o eixo, o que impossibilita a continuação das iterações. Esse impasse é resolvido testando previamente se o coeficiente angular da tangente é zero, e se for, pega-se um valor próximo a x_i, e usamos esse valor para continuar a iteração.

Generalizamos o método de Newton para *n*-dimensões considerando a derivada de f, como a Jacobiana e usando a norma Euclidiana para calcular a distancia entre dois pontos. O algoritmo segue com essas alterações.

Métodos Quase-Newton em 1 Dimensão

Um dos problemas do método de Newton é sua implementação, pois é ineficiente calcular a derivada simbólica de uma função (Press *et al.*, 2002). Usa-se então a secante de dois pontos como aproximação. Os métodos do tipo Quase-Newton (Brinkhuis e Tikhomirov, 2005) são métodos essencialmente iguais ao método de Newton, porém eles diferem na aproximação da derivada pela secante de dois pontos. Foram estudados três tipos:

1. **(QN1)** - A secante de dois pontos iniciais é usada como aproximação da derivada, e esse valor é usado em todas as iterações. É o método menos preciso. Ambos os pontos são atualizados a cada iteração. Não converge para todas as funções testadas, como por exemplo, a função $sen(x)$.
2. **(QN2)** - A secante de dois pontos é usada como aproximação da derivada, e esse valor e os dois pontos são atualizados a cada iteração. É o método mais preciso e o mais rápido dos três.
3. **(QN3)** - A secante de dois pontos é usada como aproximação da derivada, e esse valor e apenas um dos pontos, são atualizados a cada iteração. Um ponto é fixo. É o mais lento dos três métodos. Não converge para função $sen(x)$.

O segundo tipo foi escolhido para a generalização em *n*-dimensões. Em *n*-dimensões teríamos que calcular a inversa da Jacobiana a cada iteração, o que é uma operação custosa.

Tornamos o algoritmo mais eficiente atualizando diretamente a inversa da Jacobiana. O algoritmo segue usualmente.

Método de Lagrange

Uma limitação dos métodos do tipo Quase-Newton é que não consideram um domínio restringido por uma função. O método de Lagrange visa maximizar/minimizar funções com restrições de igualdade (Bortolossi, 2002). É montado a Lagrangeana com a função objetiva f (função que desejamos minimizar), e os pontos admissíveis que satisfazem a função $g(x) = c$, c é constante. $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x) - c)$. Derivando essa função e igualando a zero, é possível obter valores de x e λ que são pontos críticos de f dado sua restrição g. Como igualamos a função à zero, podemos usar o método Quase-Newton já estabelecido para achar os valores apropriados.

O método pode ser generalizado para *n* variáveis e *m* restrições. Usamos o método Quase-Newton para *n*-dimensões para resolver o sistema.

Função Barreira

Definimos uma função F a patir da função objetiva f e suas restrições de desigualdade, tal que, dado um conjunto A de pontos admissíveis, quanto mais próximo da borda de A, maior o valor de F. Uma barreira então é formada, e é possível mostrar que F possui um mínimo. O algoritmo consiste em modificar F de tal forma que se aproxima a f, a cada iteração. Usamos o método Quase-Newton para achar o mínimo de F, e usar esse valor como chute inicial para a próxima iteração do Quase-Newton.

Programação Sequencial Quadrática

Introduzimos uma aproximação quadrática da Lagrangeana de uma função objetiva f e uma aproximação linear de suas restrições. Desta forma, a questão é reduzida a um problema de programação quadrática. Com isso estimamos o conjunto de restrições necessárias A_0, e resolvemos o sistema para obter o passo que minimiza as aproximações. Se o passo dado violar alguma restrição que não esteja no conjunto A_0 (inativa), seu tamanho é diminuído, acrescentamos essa restrição ao conjunto de vínculos ativos e repetimos o processo. Se o passo não violar nenhuma restrição inativa, checamos então os multiplicadores de Lagrange: caso todos sejam positivos, o mínimo foi achado, caso contrário, removemos o valor mais negativo do conjunto e repetimos o processo.

Referências Bibliográficas

1. BRINKHUIS, J.; TIKHOMIROV, V. **Optimization: Insights and Applications**. Princeton University Press, 2005. (Princeton Series in Applied Mathematics).

2. BORTOLOSSI, J.H. **Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: Uma Introdução à Teoria de Otimização**. Rio de Janeiro, Editora PUC-Rio, 2002.

3. PRESS, W. H. *et al.* **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. 2nd. ed. New York, NY.: Press Syndicate of the University of Cambridge, 2002.

4. BETTS, J. T. **Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming.** Second Edition, SIAM, 2009.