Departamento de Matemática

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Aluno: João Miranda Carnevale

Orientador: Nicolau Saldanha

Introdução à Teoria de Grupos

A teoria de grupos surgiu como um ramo da matemática "pura", ligado ao problema de encontrar raízes de equações algébricas, por E. Galois e outros matemáticos. De modo bastante geral, a teoria de grupos é a linguagem matemática adequada para a descrição das simetrias. Logo após o surgimento da Mecânica Quântica, E. Wigner aplicou as ideias da teoria de grupos para a descrição das simetrias dos sistemas quânticos. Além disso, as ideias de teoria de grupos são fundamentais para classificação de moléculas e estruturas cristalinas.

Definição de Grupo

Um grupo G é um conjunto de elementos que podem ser combinados por uma operação binária que designaremos genericamente pelo símbolo $*$ e que satisfazem os seguintes axiomas:

1. Fechamento: se a e b são dois elementos quaisquer de G, então seu produto $a*b$ também é elemento de G;
2. Associatividade: se a, b e c pertence a G, então $(a*b)*c = a*(b*c)= a*b*c$;
3. Elemento neutro: existe um elemento "e" tal que, para todo $a \in G$, $a*e = e*a = a$
4. Elemento inverso: todo $a \in G$ tem um elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Caso seja finito, o número de elementos do grupo é dado pela ordem do grupo.

Grupo de Permutações

Existem dois principais grupos de permutações:

1. Sn: É o grupo de todas as permutações de n elementos, a operação binária é a composição de permutações e a identidade é a “permutação” que não troca nenhum elemento de lugar. É um grupo finito de ordem n! e não é comutativo.

2. An: É o grupo das permutações pares de n elementos, a operação binária é a composição de permutações e a identidade é a “permutação” que não troca nenhum elemento de lugar. É um grupo finito de ordem n!/2 e não é comutativo.

Desafio Matemático

52 matemáticos foram sequestrados e reunidos em uma sala. Os sequestradores lhes propõem um desafio de vida ou morte, todos os 52 matemáticos serão separados em 52 salas diferentes com uma mesa no centro. Sobre cada mesa haverá 52 fotos do rosto de cada um dos matemáticos viradas para baixo, na mesma ordem em todas as salas. Não há comunicação entre as salas. Para sobreviverem cada matemático deverá virar a foto correspondente ao seu próprio rosto, e terá 26 chances para realizar o feito. Apenas se todos os matemáticos conseguirem eles sobreviverão, caso pelo menos um não conseguir, todos morrerão. É possível formar uma estratégia que suba probabilidade de todos sobreviverem para mais de 1/4?