P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.1
Data: 14 de abril de 2007

Nome: **GABARITO** ______________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
2a	1.5		
2b	1.5		
3a	1.5		
3b	1.5		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou preta. Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
   $$y' - x^2 y = 2x^2, \quad y(0) = 0.$$

   Primeira solução:

   Reescreva a equação como

   $$\frac{y'}{y+2} = x^2$$

   que pode ser resolvida pelo método das variáveis separáveis:

   $$\int \frac{dy}{y+2} = \int x^2 dx,$$
   $$\ln(y+2) = \frac{x^3}{3} + C_0,$$
   $$y = -2 + C_1 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

   Substituindo as condições iniciais temos $y(0) = -2 + C_1 = 0$ donde $C_1 = 2$ e

   $$y = -2 + 2\exp\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

Segunda solução:

Esta é uma EDO linear de primeira ordem. Vamos primeiro resolver a equação homogênea associada

$$y_h' - x^2 y_h = 0$$

separando variáveis:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy_h}{y_h} &= \int x^2 dx, \\ \ln y_h &= \frac{x^3}{3} + C_2, \\ y_h &= C_3 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right), \end{aligned}$$

A solução particular $y_p = -2$ pode ser facilmente encontrada por inspeção. Alternativamente, por variação dos parâmetros:
$y_p = z \exp(x^3/3)$ implica $y_p' = z' \exp(x^3/3) + x^2 z \exp(x^3/3)$ e substituindo na equação temos $z' \exp(x^3/3) = 2x^2$ ou

$$z = 2 \int \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right) x^2 dx = 2 \int e^{-u} du = -2e^{-u} = -2 \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$$

(onde fizemos a substituição $u = x^3/3$) donde temos $y_p = -2$. De qualquer forma, a solução geral é

$$y = -2 + C_1 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

e pelas condições iniciais temos

$$y = -2 + 2 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

(b)

$$y'' + 2y' + y = 2\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Solução:

A equação associada $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tem raiz dupla $\lambda = -1$ donde a solução da equação homogênea associada é $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. É natural conjecturar que exista uma solução particular da forma $y_p = C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$. Temos

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 2C_4 \cos x - 2C_3 \operatorname{sen} x = 2\cos x$$

que de fato é satisfeita para $C_3 = 0$ e $C_4 = 1$. Assim a solução geral é

$$y = \operatorname{sen} x + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Temos $y(0) = C_1 = 1$ e $y'(0) = 1 - C_1 + C_2 = 1$ donde $C_1 = C_2 = 1$ e

$$y = \operatorname{sen} x + (1 + x)e^{-x}.$$

2. Considere a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 1, \quad y_0 = y_1 = 3.$$

(a) Encontre uma fórmula para y_n.

(b) Calcule y_{42} (simplifique sua resposta).

Solução:

(a) A equação associada $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ tem raízes complexas conjugadas $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm\pi/4}$. A solução particular $\hat{y}_n = 1$ pode ser facilmente encontrada por inspeção donde a solução geral da equação de diferenças é

$$y_n = 1 + C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n = 1 + C_3 2^{n/2}\cos(n\pi/4) + C_4 2^{n/2}\operatorname{sen}(n\pi/4).$$

As condições iniciais dão

$$y_n = 1 + (1+i)^n + (1-i)^n = 1 + 2^{((n+2)/2)}\cos(n\pi/4).$$

(b) Temos

$$y_{42} = 1 + (1+i)^{42} + (1-i)^{42} = 1 + 2^{22}\cos(21\pi/2) = 1.$$

Pela primeira fórmula a simplificação segue de $(1+i)^2 = 2i$ donde $(1+i)^8 = 2^4$ e $(1+i)^{42} = ((1+i)^8)^5(1+i)^2 = 2^{21}i$ e analogamente $(1-i)^{42} = -2^{21}i$. Pela segunda fórmula basta observar que $\cos(21\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + by' + 4y = 0$$

onde $b > 0$ é um parâmetro real.

(a) Encontre a solução geral da equação (divida em casos se necessário).

(b) Determine para quais valores do parâmetro b a equação admite solução não trivial (i.e., não identicamente nula) satisfazendo

$$y(4) = y(-4) = 0.$$

Solução:

(a) A equação associada $\lambda^2 + b\lambda + 4 = 0$ tem raízes

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 16}}{2}.$$

É conveniente separar em três casos.

$b > 4$**: raízes reais distintas**

Sejam

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 16}}{2} < \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 16}}{2}.$$

A solução geral é

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \qquad \textbf{(I)}$$

$b = 4$**: raiz real dupla**

Temos que $\lambda = -2$ é raiz dupla donde a solução geral é

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x\, e^{-2x}. \qquad \textbf{(II)}$$

$0 < b < 4$**: raízes complexas conjugadas**

Seja $\alpha = -b/2$, $\beta = \sqrt{16 - b^2}/2$. As raízes são $\alpha \pm \beta i$ donde a solução geral é

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x). \qquad \textbf{(III)}$$

(b) É um fato conhecido e de fácil verificação que funções não triviais da forma **(I)** e **(II)** só podem se anular no máximo em um ponto (não existe oscilação). De fato, para **(I)** escreva

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}) = 0$$
$$C_1 + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = 0$$
$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)$$

donde a equação $y = 0$ tem uma única solução real se C_1 e C_2 tiverem sinais opostos e nenhuma se C_1 e C_2 tiverem o mesmo sinal ou se um dos dois se anular. Para o caso **(II)** escreva

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) = 0$$
$$x = -\frac{C_1}{C_2}$$

e a equação $y = 0$ admite uma única solução real se $C_2 \neq 0$ e nenhuma solução se $C_2 = 0$.

Para o caso **(III)** escreva

$$y = Ce^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta(x - x_0)).$$

Se $y(-4) = 0$ podemos tomar $x_0 = -4$ e temos

$$y = Ce^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta(x + 4))$$

donde $y(4) = 0$ se e somente se $\mathrm{sen}(8\beta) = 0$. Em outras palavras, se e somente se

$$8\beta = 8\frac{\sqrt{16 - b^2}}{2} = k\pi, \quad k \text{ inteiro positivo.}$$

Ou seja,

$$\sqrt{16 - b^2} = k\pi/4 \text{ ou } 16 - b^2 = k^2\frac{\pi^2}{16} \text{ ou } b^2 = 16 - k^2\frac{\pi^2}{16}.$$

Devemos verificar para quais valores de k temos

$$16 - k^2\frac{\pi^2}{16} > 0 \text{ ou } 16 > k^2\frac{\pi^2}{16} \text{ ou } 4 > k\frac{\pi}{4} \text{ ou } k\pi < 16$$

o que claramente vale para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim os valores de b pedidos são

$$b = \sqrt{16 - k^2\frac{\pi^2}{16}}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$