

Análise qualitativa, primeira ordem

Equações diferenciais e de diferenças, 2009.2

Esse texto serve de material de estudo para um assunto que não é fácil de encontrar em livros didáticos. Você deve lê-lo acompanhado de papel e lápis: se der para acrescentar um computador, ainda melhor.

A essa altura, você tem fórmulas para resolver as equações de primeira ordem lineares mais gerais, tanto diferenciais quanto de diferenças. Claro que o mundo não acaba aqui: existem muitas equações não lineares interessantes. A má notícia é que nem sempre você vai encontrar uma fórmula explícita para a resposta. A sequência de alternativas a tentar é a óbvia.

- Tente um pouco: chute, apele para técnicas que você conheça.
- Pergunte ao Maple. Se ele não der uma resposta, é bem provável que a equação não tenha uma solução explícita.
- Parta para uma análise numérica.

A análise numérica pode ser conveniente mesmo quando o Maple dá uma resposta, se você não sabe interpretá-la — ela pode conter funções especiais, números complexos, enfim, material além do vocabulário que você conhece. Para equações de diferenças, calcular a resposta é fácil: a partir do valor inicial, você calcula o seguinte e vai repetindo o processo. Por outro lado, existe outra ferramenta, a análise qualitativa.

Vamos começar com a equação logística, extensivamente discutida no Boyce-DiPrima, p. 44 da oitava edição. Escolhendo valores para os parâmetros para não usar letra demais, considere

$$y'(t) = (1 - y)y, \quad y(0) = c,$$

com solução

$$y(t) = \frac{c}{c(1 - e^{-t}) + e^{-t}}.$$

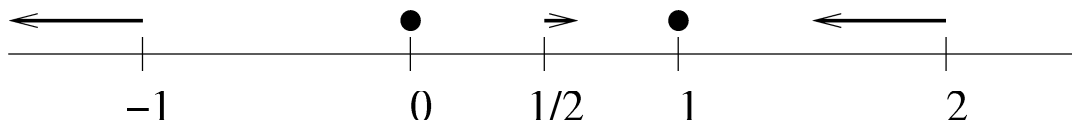
A análise qualitativa nesse caso não é sequer necessária, já que temos uma solução explícita bastante fácil de entender. Por exemplo, é fácil ver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1,$$

e que, se a condição inicial é menor do que 1, $y(t)$ vai crescendo, sem alcançar o valor assintótico (que é 1), e se for maior, vai decrescendo até ele. Você poderia

desenhar o gráfico de várias funções $y(t)$ obtidas com valores diferentes de c para convencer seus olhos de que, a longo prazo, seja qual for o tamanho da população inicial $y(0)$, ela evolui de maneira a sempre ter o mesmo valor limite: essa é a propriedade mais interessante do modelo logístico de crescimento de populações.

Bom, vamos fazer algo completamente diferente que vai nos levar às mesmas conclusões, e que pode ser aplicado em muitas outras situações para as quais não temos fórmulas semelhantes. A idéia é a seguinte. Pense que $y(t)$ é a posição de uma partícula, assim $y'(t)$ é sua velocidade. Agora, desenhe uma reta e pense que cada ponto dela é uma posição $y(t)$ na qual você apoia uma setinha indicando a velocidade naquela posição.



Acompanhe as afirmações a seguir pela figura. No ponto $y(t) = 1/2$, a derivada vale $y'(t) = y(t)(1 - y(t)) = 1/4$; nos pontos $y(t) = -1$ ou 2 , ela vale -2 . Só existem dois pontos em que a velocidade é nula, que são 0 e 1 . Assim, estritamente entre 0 e 1 a velocidade é positiva (setinhas para a direita) e fora do intervalo $[0, 1]$ ela é negativa (seta para a esquerda).

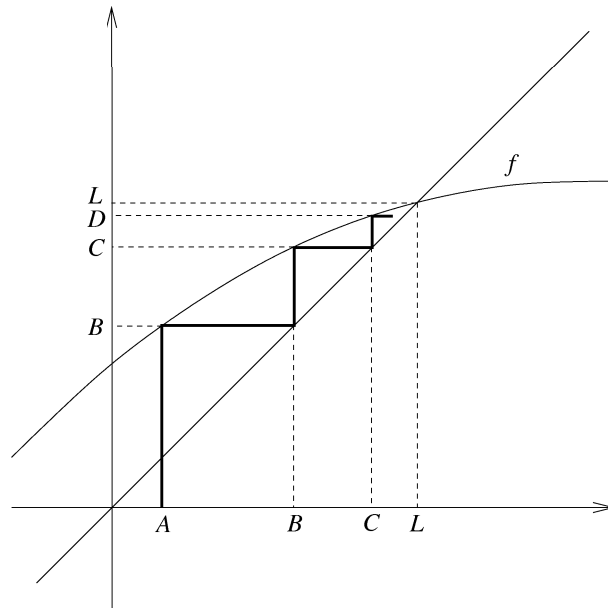
Agora, pense que as setinhas indicam correntezas, que arrastam os pontos na reta. Se você começa em um ponto entre 0 e 1 (isto é, se a sua posição inicial $y(0)$ está entre 0 e 1), você vai ser arrastado para a direita, e à medida que o ponto vai chegando perto do ponto 1 , a velocidade vai indo a 0 . Incrível, todas as propriedades a longo prazo das soluções que a gente obteve pela fórmula agora a gente simplesmente enxerga nessa figura!

Vamos mudar de assunto e considerar uma equação de diferenças: a figura que interessa é outra, não temos as metáforas vindas da física. Suponha que você queira resolver a equação

$$y(n+1) = 1 + \frac{\text{sen}(y(n))}{3}, \quad y(0) = A,$$

que é um caso especial de $y(n+1) = f(y(n))$, $y(0) = A$ onde $f(x) = 1 + \text{sen}(x)/3$ (entenda isso com cuidado).

Agora, interessa sobrepor os gráficos de f e de $y = x$, como na figura abaixo. Os segmentos mais espessos indicam como construir os pontos B , C , D a partir da condição inicial A colocada no eixo horizontal. O ponto B no eixo vertical tem coordenadas $(0, y(1)) = (0, f(A))$, C é $(0, y(2)) = (0, f(f(A)))$, etc. Para terminar, os segmentos mais finos mostram como obter ‘cópias’ de B , C ... no eixo horizontal. Nesse caso, $y(n)$ converge para a solução L de $f(x) = x$, uma equação que aliás a gente nem consegue resolver de forma fechada.



Exercício muito importante. Faça o mesmo para outras funções f : use funções crescentes e decrescentes, parábolas, funções muito ou pouco inclinadas, funções que encontram a reta $y = x$ em mais de um ponto...