

LISTA 1 DE ANÁLISE NO \mathbb{R}^n 2011

RICARDO SA EARP

Espaços métricos

Primeira parte

- (1) Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. Deduza que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.
- (2) Sejam E_1, \dots, E_n espaços vetoriais normados cujas normas são $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n$, respectivamente.
Seja $E := E_1 \times \dots \times E_n$ o espaço produto.
 - (a) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_\infty := \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Note que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach, se e só se cada $(E_i, \|\cdot\|_i)$ é um espaço de Banach.
 - (b) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^n \|v_i\|_i$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado.
 - (c) Para cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$ definimos $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_i^2 \right)^{1/2}$.
Deduza que $(E, \|\cdot\|_2)$ é um espaço vetorial normado.
- (3) Seja E um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em E e escrevemos $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ “é mais fina” que $\|\cdot\|_2$, se existe uma constante positiva $c > 0$, tal que $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in E$.
 - (a) Deduza que a *topologia* em $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ é mais fina que a *topologia* em $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$, ou seja se $U \subset E$ é um aberto de E_2 então U é também um aberto de E_1 .
 - (b) Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E e seja $x \in E$. Deduza que se $x_n \rightarrow x$ em E_1 então $x_n \rightarrow x$ em E_2 . Em particular, deduza que se uma sequência $\{x_n\}$ tem norma em E_1 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande, então também tem norma em E_2 arbitrariamente pequena para n suficientemente grande.
 - (c) Deduza que a aplicação identidade $\text{Id} : E_1 = (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$ é contínua.

- (4) Seja $C^0[a, b]$ o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $f \in C^0[a, b]$. Considere $\|f\|_\infty := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Considere também $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$. Finalmente considere $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.
- Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado (“espaço de Banach”).
 - Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado.
 - Deduza que $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ é um espaço vetorial normado cuja norma é proveniente de um produto interno.
 - Deduza que a norma $\|\cdot\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_1$, mais que $\|\cdot\|_1$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_\infty$.
 - Deduza que a norma $\|\cdot\|_\infty$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_2$, mais que $\|\cdot\|_2$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_\infty$.
 - Deduza que a norma $\|\cdot\|_2$ mais fina que a norma $\|\cdot\|_1$, mais que $\|\cdot\|_1$ não é mais fina do que $\|\cdot\|_2$.
- (5) Seja $C^1[a, b]$ o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em todos os pontos. Defina $\|f\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.
- Deduza que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado (“espaço de Banach”).
 - Generalize esta definição de espaço considerando o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas de ordem k contínuas.
- (6) Considere $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados (que, possivelmente, têm dimensão infinita). Deduza que as afirmações abaixo sobre uma transformação (operador) linear $T : E \rightarrow F$ são equivalentes.
- $T : E \rightarrow F$ é contínua; isto é, fixado $a \in E$ qualquer, segue então que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon$.
 - T é contínua em $0 \in E$.
 - Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E$.
 - Existe $c > 0$ tal que $\|T(x - y)\|_F \leq c\|x - y\|_E, \forall x, y \in E$.
- (7) Assuma que $T : E \rightarrow F$ é linear, injetora e sobrejetora. Deduza que $T : E \rightarrow F$ é um *homeomorfismo*, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tal que $a\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq b\|x\|_E$.
- OBS: Se E e F são espaços de Banach e T é um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F então T é uma aplicação

aberta: T leva abertos de E em abertos de F (Este é o “teorema de Schauder” baseado no “teorema da aplicação aberta da Análise Funcional”).

- (8) Assumindo que E e F são espaços de Banach deduza que se $T : E \rightarrow F$ é linear, injetora e sobrejetora então T^{-1} é contínua de F sobre E .
- (9) Considere (E, \langle, \rangle) um espaço vetorial munido de um produto interno \langle, \rangle . Deduza que o produto interno $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.
- (10) Dê exemplo de um conjunto ortonormal infinito em ℓ^2 .
- (11) Seja $C^0[0, 2\pi]$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Considere o conjunto $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$. Deduza que S é ortonormal.
- (12) Seja S um conjunto ortonormal de um espaço um espaço vetorial E munido de um produto interno \langle, \rangle . Deduza que cada par de elementos distintos de S estão a uma distância igual a $\sqrt{2}$.
- (13) Considere (E, \langle, \rangle) um espaço vetorial munido de um produto interno \langle, \rangle . Seja $S \subset E$ um conjunto ortonormal de E .
- (a) Seja u_1, \dots, u_n uma coleção finita de elementos distintos de S . Seja $x \in E$. Deduza que

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{desigualdade de Bessel})$$

Sugestão: Considere o vetor $x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$.

- (b) Seja $x \in E$. Deduza que o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $\langle x, u \rangle \neq 0$ é finito ou enumerável.

Sugestão: Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto dos pontos $u \in S$ tal que $|\langle x, u \rangle| \geq \frac{1}{n}$.

- (c) Sejam x, y pontos de E . Deduza que

$$\sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

- (14) Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno \langle, \rangle . Vamos assumir que E seja completo (quando E não tem dimensão finita E é chamado de “espaço de Hilbert”). Seja $\{u_n, n = 1, \dots\}$ um conjunto ortonormal de E infinito e enumerável.

- (a) Deduza que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$ é convergente se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

Neste caso, seja $x := \sum_{i=1}^{\infty} c_n u_n$. Deduza a seguinte relação:

$$c_n = \langle x, u_n \rangle.$$

Sugestão: Considere a sequência das somas parciais em E , dada por $s_n = \sum_{i=1}^n c_n u_n$, mostrando que esta é uma

sequência de Cauchy, se e só se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Em seguida, prove que $c_i = \langle s_n, u_i \rangle$ e use a continuidade do produto interno.

Segunda parte

- (15) (a) Assuma que $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos abertos disjuntos não vazios. Deduza que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$, ou seja nenhum destes dois subconjuntos contém valores aderentes do outro.
Sugestão: Deduza que $A = \overline{A} \cap Y$, concluindo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
- (b) Reciprocamente, deduza que se $Y = A \cup B$, onde A e B são subconjuntos disjuntos não vazios, tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Deduza que A e B são abertos em Y .
- (16) Sejam d_0 e d_1 duas métricas num mesmo conjunto X . Dizemos que (X, d_0) e (X, d_1) são espaços métricos equivalentes, se existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ positivas, tal que

$$a d_1(x, y) \leq d_0(x, y) \leq b d_1(x, y) \forall x, y \in X$$

Seja (M, d) um espaço métrico. Denotamos o $\sup\{d(x, y), x, y \in M\}$ por $\text{diam}(M)$, chamado de diâmetro de M . Suponhamos que M tem diâmetro ∞ . Deduza que $d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ e $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ são métricas em M que determinam a mesma topologia que a métrica d .

Todavia, mostre que tais métricas não são equivalentes a d .

- (17) Sejam X_1, \dots, X_n espaços topológicos metrizáveis (ou seja, a topologia de cada espaço é dada por uma métrica). Deduza que o produto $X := X_1 \times \dots \times X_n$ é metrizável e exiba uma *base* da topologia de X (uma base é uma coleção de abertos de X tal que todo aberto de X se escreve como uma união arbitrária de abertos de uma coleção).

- (18) Seja X um espaço topológico e sejam A, B , subconjuntos de X . Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, deduza, caso falso dê um contraexemplo.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 - $\overline{A^\circ} = \overline{A}$.
 - Se $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, então $A \cap B \neq \emptyset$.
- (19) Sejam A e B dois subconjuntos de um espaço topológico X . Mostre que para o subconjunto $A \times B$ de $X \times X$ (produto cartesiano), valem as seguintes propriedades:

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ, \quad \overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$$

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

- (20) Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X . Deduza que a aderência \overline{A} de A é a união de A com o conjunto dos pontos de acumulação de A .
- (21) Deduza que um conjunto finito num espaço métrico (espaço topológico de Hausdorff) é fechado.
- (22) Deduza que num espaço métrico (espaço topológico de Hausdorff) X , se um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$, então toda vizinhança aberta de x contém uma infinidade de pontos de A .
- (23) Seja X um espaço métrico (espaço topológico de Hausdorff). Deduza que a diagonal $D := \{(x, x), x \in X\}$ é um conjunto fechado no espaço produto $X \times X$.
- (24) Seja (X, d) um espaço métrico. Deduza que dado $x_0 \in X$, a função distância $d(x_0, x) := \text{dist}(x_0, x)$ é uma função contínua de $x \in X$. Deduza que $d(x, y)$ é uma função contínua de ambos x e y .
- (25) Deduza que num espaço métrico X um conjunto F é fechado se e só se para toda sequência x_n convergente de pontos de F , convergindo a $x \in X$, então $x \in F$.
- (26) Seja (X, d) um espaço métrico munido da distância d . Seja $X_0 \subset X$ um subconjunto de X , considerado como um espaço métrico em si mesmo, i.e $X_0 = (X_0, d)$. Deduza que se X é completo e se X_0 é fechado em X , então (X_0, d) também é completo.
- (27) Deduza que um conjunto compacto K de um espaço métrico (X, d) é fechado e limitado.
Deduza também que K é completo.

- (28) Seja X um espaço métrico e seja $S \subset X$ conjunto. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação* do conjunto S , se cada vizinhança de x (i.e aberto que contém x), contém um ponto de S diferente de x .

Deduzza que x é um ponto de acumulação de S , se e só se existe uma sequência convergente $\{x_n\}$ de pontos distintos de S que tem x como limite.

- (29) Seja X um espaço métrico completo. Dizemos que um conjunto $S \subset X$ tem diâmetro finito se a função $d : S \times S \rightarrow \text{dist}(x, y)$ é limitada para todo $x, y \in S$. Denotamos o $\sup\{d(x, y), x, y \in S\}$ por $\text{diam}(S)$, chamado de diâmetro de S .

(a) Se $S \subset X$, deduzza que $\text{diam}(S) = \text{diam}(\overline{S})$.

(b) Suponha que $\{S_n\}$ é uma sequência de conjuntos fechados, não vazios tal que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \cdots$. Suponha que o diâmetro $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Deduzza que a interseção $\bigcap S_n$ de todos os conjuntos S_n não é vazia. Deduzza que a interseção consiste de um único ponto. Este resultado é conhecido como *teorema de Cantor*.

Dê um contraexemplo, se a hipótese $\text{diam}(S_n) \rightarrow 0$, não é satisfeita.

(c) Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $\phi : X \rightarrow (0, \infty)$ uma função real positiva. Assuma que $\inf\{\phi(x) + \phi(y), d(x, y) \geq a\} = \mu(a) > 0, \forall a > 0$. Deduzza que toda sequência $\{x_n\}$ para a qual $\phi(x_n)$ é monótona e $\phi(x_n) \downarrow 0$, satisfaz que $\{x_n\}$ converge para um mesmo ponto u de X .

Sugestão: Considere $A_n = \{x, \phi(x) \leq \phi(x_n)\}$. Deduzza que o fecho $\overline{A_n}$ não é vazio e que $A_n \supset \overline{A_{n+1}} \cdots$. Deduzza que $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Use o teorema de Cantor, estabelecido no item anterior para mostrar que $\bigcap_n \overline{A_n} = \{u\}$ e que $x_n \rightarrow u$.

(d) Seja K_n uma sequência de subconjuntos compactos de X , $n = 1, 2, \dots$. Assuma que $K_n \supset K_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ e que $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Deduzza que $\bigcap_n K_n$ consiste em um único ponto.

- (30) Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos de um espaço métrico (X, d) .

(a) Defina $d(S_1, S_2)$.

(b) Se S_1 e S_2 são fechados disjuntos i.e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, tal que $\forall p \in S_2, \text{dist}(p, S_1) > 0$, será que $\text{dist}(S_1, S_2) > 0$?

(c) Se S_1 é compacto e S_2 é fechado, sendo S_1 e S_2 disjuntos, tal que $\forall p \in S_2, \text{dist}(p, S_1) > 0$, será que $\text{dist}(S_1, S_2) > 0$?

- (31) Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $f : X \rightarrow X$.
 (a) Deduza que se f é uma *imersão isométrica*, *i. e*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X$$

e se X é compacto então f é sobrejetora e daí deduza que f é uma isometria, por conseguinte, f é um homeomorfismo.

Sugestão: Seja $z \in X$ e $z \notin f(X)$. Deduza que existe $\epsilon > 0$ tal que $d(z, f(X)) \geq \epsilon$. Forme a sequência $z_1 = f(z)$, $z_{n+1} = f(z_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Analise $d(x_m, x_n)$, para $n \neq m$.

- (b) Assuma que f é um *encurtamento*, *i. e*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y$$

Assuma X é compacto. Segue então que f tem um único ponto fixo. *Sugestão:* Considere $A_n = f^n(X)$, onde $f^1 = f$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. Em seguida, considere $A = \bigcap_n A_n$, e mostre que $A = f(A)$. Analise o diâmetro de A . Outra sugestão: Considere

$$x \mapsto d(x, f(x)).$$

Além disso, deduza que para cada $x_0 \in X$ a sequência dos iterados $\{x_n = f^n(x_0)\}$, converge para o ponto fixo único.

Compare o resultado anterior com o comportamento da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

Terceira parte

- (32) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua de um espaço topológico X num espaço topológico Y . Seja $A \subset X$. Deduza que a restrição de f à A é contínua (munindo, é claro, A com a topologia induzida).
- (33) Sejam X e Y espaços topológicos. Assuma que $X = A \cup B$, onde A e B são fechados em X . Sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ duas funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Mostre que a função $h : X \rightarrow Y$ dada por $h(x) = f(x)$, $x \in A$ e $h(x) = g(x)$, $x \in B$ é contínua.
- (34) Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço topológico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (35) Seja $f(x) = v \cdot x$, onde \cdot denota o produto escalar em \mathbb{R}^n , e $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Discuta a continuidade de $f(x)$.

Mostre que os semi-planos dados pelas equações

$$\{x; v \cdot x > \alpha\} \quad \text{e} \quad \{x; v \cdot x \geq \alpha\}$$

são subconjuntos abertos e fechados, respectivamente. Deduzir que o hiperplano $\{x; v \cdot x = \alpha\}$, é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n .

(36) Mostre que se f, g são funções contínuas que levam um espaço topológico X em \mathbb{R}^n , então se $f(a) \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue-se que $f(x) \neq g(x)$, numa vizinhança de a .

(37) Sejam X e Y espaços topológicos. Sejam F_1, \dots, F_n fechados em X tal que $X = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$.

Seja $f : X \rightarrow Y$ tal que a restrição de f à F_i dada por $f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$ é contínua, $i = 1, \dots, n$.

Deduz que f é contínua.

(38) Considere o produto cartesiano $X := X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$. Considere a topologia produto τ em X cuja base β é constituída de produtos $A_1 \times \dots \times A_n$, onde A_i é um aberto de X_i , $i = 1, \dots, n$.

(a) Deduza que as projeções $\pi_i : X \rightarrow X_i$ são contínuas e abertas.

(b) Dado um espaço topológico Z e uma aplicação $f : Z \rightarrow X$, com $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$, deduza o seguinte:

$f(z)$ é contínua, se e só se cada $f_i = \pi_i \circ f$ é contínua, $i = 1, \dots, n$.

(39) Sejam X e Y espaços topológicos com Y de Hausdorff. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Deduza que o gráfico de f definido por $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y, y = f(x)\}$ é fechado em $X \times Y$.

Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$ é fechada em $X \times X$, se X é Hausdorff.

(40) Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua entre um espaço métrico M e um espaço métrico N . Deduza que $G(f)$, o gráfico de f , definido no item anterior, é homeomorfo a M .

(41) Seja $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma família de funções reais contínuas $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas num espaço topológico X . Deduza que o conjunto $F = \{x \in X, f_\alpha(x) \leq 0, \forall \alpha \in \mathcal{A}\}$ é fechado em X .

(42) Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n . Definimos:

$$f(x) := \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

que se chama de distância de x ao conjunto A . Deduza:

(a) f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em \mathbb{R}^n .

(b) Dê uma caracterização da aderência \overline{A} de A em termos de $f(x)$.

- (c) Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \text{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de \bar{A} .
- (d) Dados dois conjuntos A, B de \mathbb{R}^n defina $\text{dist}(A, B)$, a distância de A a B . Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.
- (e) Seja V uma vizinhança de um compacto A , $A \neq \emptyset$ (V é um aberto que contém A). Deduza que existe $t > 0$ tal que $V_t(A) \subset V$, onde $V_t(A) = \{x, d(x, A) < t\}$.

Sugestão: Considere $\delta = d(A, V^c)$ e considere $t < \delta$.

- (43) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z , digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.
- (44) Generalize o item anterior para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \subset Z \rightarrow Y$, de um espaço métrico $X \subset Z$ num espaço métrico completo Y .
- (45) Sejam X e \tilde{X} espaços métricos e seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua sobrejetiva que possui a seguinte propriedade:
- Para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança (aberta) V de x em X (chamada de *vizinhança distinguida*), tal que $\pi^{-1}(V) = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ = uma união de abertos dois a dois disjuntos U_{α} , cada um dos quais se aplica por π homeomorficamente sobre V . Ou seja, $\pi|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow V$ é um homeomorfismo. Tal π é chamada de *aplicação de recobrimento* ou simplesmente *recobrimento*.

Seja $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Deduza que existe uma partição $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = 1$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de $[0, 1] \times [0, 1]$, fina o suficiente (formada de retângulos de diâmetros muito pequenos), de maneira que cada retângulo da partição $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ é enviado por F numa vizinhança distinguida V em X .

- (46) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável tal que $|g'(x)| \leq c$, onde c é uma constante satisfazendo $0 < c < 1$.
- (a) Deduza que o gráfico de g corta a reta $y = x$ num único ponto.

- (b) Deduza que a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ produz um homeomorfismo de \mathbb{R} sobre \mathbb{R} .

Quarta parte

- (47) Responda verdadeiro ou falso justificando.
- (a) A função $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in [0, 1]$ é contrativa, como $[0, 1]$ é completo, F tem um ponto fixo.
- (b) A função $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ é um encurtamento, como \mathbb{R} é completo F tem um ponto fixo.
- (48) Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $F : X \rightarrow X$ uma aplicação tal que o iterado $F^k : X \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}^*$ seja uma contração. Deduza que F possui um único ponto fixo u e que a sequência dos iterados $F^n x$ converge a este u , para qualquer $x \in X$.
- (49) Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $F_n : X \rightarrow X$ uma sequência de aplicações contínuas. Assuma que cada F_n possui um ponto fixo x_n .
- (a) Assuma que $F_n \rightarrow F$, uniformemente em X .
- (i) Deduza que se $x_n \rightarrow x_0$, ou se $F(x_n) \rightarrow x_0$, então x_0 é um ponto fixo de F .
- (ii) Deduza que se F é uma contração, então x_n converge para um único ponto fixo de F .
- (b) Assuma que F_n converge pontualmente a F e que existe $M > 0$, independente de n , tal que $d(F_n(x), F_n(y)) \leq M d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Deduza F é Lipschitz. Deduza também que se $x_n \rightarrow x_0$, então x_0 é um ponto fixo de F .
- (50) Seja E um espaço de Banach. Seja $F : E \rightarrow E$ uma contração. Segue então que a aplicação $f := I - F : E \rightarrow E$, chamada de *campo correspondente ou campo associado*, é um homeomorfismo de E sobre E .
- (51) Seja E um espaço de Banach. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo satisfazendo $\|I - T\| < 1$. Deduza que $T : E \rightarrow E$ é um homeomorfismo linear (isomorfismo) e que a inversa T^{-1} satisfaz $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$. *Sugestão:* Use o resultado anterior.
- (52) Seja E um espaço de Banach. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo e inversível. Deduza que cada operador linear S

satisfazendo $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$ é inversível e sua inversa S^{-1} satisfaz $\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|I - ST^{-1}\|}$.

- (53) Seja (Y, d) um espaço métrico. Seja $X \subset Y$ um subconjunto fechado com interior não vazio U . Seja $\mathcal{C}(X, Y)$ o conjunto de todas as contrações de X em Y . Seja $\{H_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ uma família em $\mathcal{C}(X, Y)$, que é α -contrativa (segundo a definição dada em aula). Deduza que a aplicação $:\Lambda \times X \rightarrow Y$, que leva $(\lambda, x) \mapsto H(\lambda, x) := H_\lambda(x)$, é contínua.
- (54) Seja C um convexo fechado de um espaço de Banach $(E, \|\cdot\|)$. Seja U um aberto de C , com a topologia induzida. Suponhamos que $0 \in U$. Suponha que $F : \bar{U} \rightarrow C$ seja uma contração e seja uma aplicação limitada (A imagem de F é um conjunto limitado). Assuma que para cada $x \in \partial U$ a seguinte condição é satisfeita: $\|F(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2$. Deduza que F tem um único ponto fixo.

Sugestão: Aplique a Alternativa não linear para aplicações contrativas.

- (55) (Teorema de Picard-Lindelöf) Seja $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e Lipschitz em y , isto é existe $L > 0$ tal que $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Deduza que existe uma única solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

em $C^1[0, T]$.

- (56) Seja C um convexo compacto (não vazio) de um espaço vetorial normado E . Seja $F : C \rightarrow C$ uma aplicação satisfazendo

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C$$

Deduza que F tem pelo menos um ponto fixo.

Sugestão:

Seja $x_0 \in C$. Considere a função $F_t(x) = (1 - t)F(x) + tx_0, t \in (0, 1)$. Deduza que F_t é uma aplicação contrativa de C em si mesmo. Seja $\{t_n\}$ uma sequência de números reais positivos, $0 < t_n < 1$, tendendo a zero, i.e $t \downarrow 0$. Suponha que a sequência a_n de pontos fixos de F_{t_n} (i.e $F_{t_n}(a_n) = a_n$) satisfaça $a_n \rightarrow a \in C$. Deduza que $F_{t_n}(a_n) \rightarrow a$, e que a é um ponto fixo de F .

Deduza que a hipótese “convexa” não pode ser eliminada na hipótese do resultado. Deduza que a hipótese de “compacidade” também não pode ser eliminada do resultado.

NOTA: O *teorema de Schauder* diz que se C é um convexo compacto de um espaço vetorial normado, basta que $T : C \rightarrow C$ seja contínua para garantir a existência de um ponto fixo de T .

- (57) Seja X um espaço métrico completo (não vazio). Seja Λ um espaço métrico. Seja $F : X \times \Lambda \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Assuma que F é uniformemente contrátil, isto é, existe $0 < c < 1$ tal que $\forall x, y \in X$ e todo $\lambda \in \Lambda$,

$$d(F(x, \lambda), F(y, \lambda)) \leq c d(x, y)$$

Deduza que para cada $\lambda \in \Lambda$ a equação $F(x, \lambda) = x$ admite uma única solução $x = x(\lambda)$ que varia continuamente com λ .

Sugestão: Use o princípio de Banach e a continuidade de F com respeito a λ . Uma aplicação interessante:

Veremos depois que a aplicação

$$(x, y, t) \rightarrow F(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1, \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2} \right)$$

é uniformemente contrátil ($c = \frac{1}{\sqrt{2}}$), no plano xy munido da norma Euclideana. Logo $F(x, y, t) = (x, y)$ define implicitamente $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que é a única solução da equação, contínua em t .

- (58) Seja E um espaço vetorial normado de dimensão n , munido da norma $\| \cdot \|$.
- Deduza que existe uma norma $\| \cdot \|_1$ em \mathbb{R}^n e uma isometria global $T : (E, \| \cdot \|) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$, levando a esfera unitária $\{ \|x\| = 1 \}$ de E na esfera unitária de \mathbb{R}^n na norma $\| \cdot \|_1$.
 - Deduza que E é homeomorfo ao espaço Euclideano \mathbb{R}^n , dotado de sua topologia natural Euclideana.
 - Deduza que o homeomorfismo h entre E e \mathbb{R}^n do item b) pode ser escolhido satisfazendo as seguintes propriedades:
 - h leva conjuntos convexos de E em conjuntos convexos de \mathbb{R}^n .
 - h leva pontos simétricos de E (com respeito a origem), em pontos simétricos de \mathbb{R}^n (com respeito a origem).
- (59) Seja $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Seja $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ o toro bidimensional. Seja d a distância no espaço produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
- Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in \mathbb{T}^2 \text{ tal que } d(f(a_n), a_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Deduza que f tem um ponto fixo, *i.e* $f(x) = x$, para algum $x \in \mathbb{T}^2$.

- (b) Seja $f : \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{R} \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua. Assuma que f seja compacta; ou seja, a imagem $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ está contida num compacto de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Assuma que f satisfaça a seguinte propriedade:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{R} \times \{0\}) \text{ tal que } d(f(a_n), a_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Deduza que f tem um ponto fixo, *i.e* $f(x) = x$, para algum $x \in \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{R} \times \{0\})$.

- (60) Seja $t > 0$ e sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$. e seja

$$R := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_1|^{2t} + \dots + |x_n|^{2t} \leq 4mn.\}$$

Seja $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, onde $B_1(0)$ é a bola unitária aberta de \mathbb{R}^2 , satisfazendo:

- $f(0) = 0$.
- $\|f(0, 1 - \frac{1}{k})\| \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Deduza que $f(B_1(0)) \cap \partial R \neq \emptyset$.