

LISTA 2 DE ANÁLISE NO \mathbb{R}^n 2011

RICARDO SA EARP

Diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis reais

Primeira parte

(1) Considere

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

- (a) Determine se f é limitada ou não no plano \mathbb{R}^2 .
 - (b) Determine se f possui um mínimo global. Determine se f possui um máximo global. Calcule as derivadas parciais nestes pontos, caso tais pontos existam.
 - (c) Escreva a equação do plano tangente relativa a um ponto de máximo global correspondente a um ponto (x, y) contido no primeiro quadrante aberto $x > 0, y > 0$, caso tal ponto exista.
 - (d) Discuta a continuidade de f na origem, e em seguida discuta a continuidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - (e) Discuta a diferenciabilidade de f .
 - (f) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f , primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
 - (g) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - (h) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f relativa ao ponto $(2, 3)$.
 - (i) Usando o MAPLE, esboce um desenho do gráfico de f .
- (2) Considere

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4 + y^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Note que f está definida numa faixa vertical.

- (a) Determine se f é limitada ou não.

- (b) Discuta a continuidade de f .
 - (c) Discuta a existência e continuidade das derivadas parciais de f , primeiramente na origem e em seguida nos outros pontos do plano.
 - (d) Discuta a diferenciabilidade de f .
 - (e) Discuta a classe de diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - (f) Seja $a > 0$. Deduza que para todo ponto da forma $(0, a)$, o normal N ao gráfico de f é vertical (ou seja, paralelo ao vetor $(0, 0, 1)$).
 - (g) Seja $a > 0$. Deduza que f restrita à bola $B_{a/2}(a, 0)$ de raio $a/2$ centrada em $(a, 0)$ é diferenciável.
- (3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 satisfazendo,
- (a) $f(0, 0) = 2$.
 - (b) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x, y) = 1$.

Deduza que

- (a) Existe um ponto $p = (x_0, y_0)$ tal que $f_x(p) = f_y(p) = 0$ e $f_{xx}(p) \leq 0, f_{yy}(p) \leq 0$.
 - (b) Existe uma tal função f da forma $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, onde $g : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.
- (4) Considere a bola $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Considere uma função $f : B_1(0) \rightarrow (0, \infty)$ de classe C^1 satisfazendo $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 1} f(x, y) = 0$. Deduza que:
- (a) A função $g(x, y) := \ln f(x, y)$ tem um ponto crítico em $B_1(0)$, , *i.e* existe $p \in B_1(0)$; $Dg(p) = 0$.
 - (b) Existe uma $f(x, y)$ satisfazendo o item anterior com $0 < f(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in B_1(0)$.
- (5) Seja $\overline{B_1(0)}$, a bola unitária centrada na origem de \mathbb{R}^2 . Seja $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é de classe C^2 em $B_1(0)$ ($\overline{B_1(0)}$ denota o fecho de $B_1(0)$).

Deduza:

Existe uma tal f satisfazendo as condições (a) e (b) abaixo:

- (a) $f(0, 0) = 1$ e $\sup_{\partial B_1(0)} |f(x, y)| < 1$, onde $\partial B_1(0)$ é o bordo ou fronteira de $B_1(0)$
 - (b) $f(x, y)$ satisfaz a inequação diferencial $(1 + y^2)f_{xx} + (1 + x^2)f_{yy} + 3yf_x + 4xf_y > 0$ em $B_1(0)$.
- (6) Seja Ω o primeiro octante de \mathbb{R}^3 dado por $x > 0, y > 0, z > 0$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real diferenciável

positivamente homogênea em Ω , isto é f satisfaz

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, x \in \Omega$$

Para $x \in \Omega$ fixado, seja $\varphi(t) := f(tx), t > 0$.

- (a) Encontre uma fórmula para $\varphi'(t)$.
 - (b) Deduza o *teorema de Euler*: $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x), \forall x \in \Omega$.
 - (c) Generalize para \mathbb{R}^n .
- (7) Seja $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, y > 0, x > 0$.
- (a) Encontre os pontos críticos de f
 - (b) Dado $1 > a > 0$, estude os mínimos locais e globais de f no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > a, y > a\}$.
 - (c) Encontre os mínimos locais de f .
 - (d) Sejam $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$. Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i}$, onde $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$. Encontre o mínimo global de f , caso este existae deduza uma desigualdade.
- (8) Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamada de *harmônica* se $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x) = 0, x \in \Omega$ onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- (a) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam i) polinômios, ii) funções racionais, iii) funções elementares envolvendo funções trigonométricas e a exponencial. Explícite os seus domínios.
 - (b) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* Δf de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas polares* (r, θ) .
 - (c) Exiba exemplos de funções harmônicas $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam dadas por polinômios.
 - (d) Exiba uma fórmula para o *Laplaciano* Δf de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 em *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) .
 - (e) Deduza que uma função harmônica $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é, *localmente*, a parte real de uma função holomorfa.
 - (f) Encontre uma função harmônica nas variáveis x, y , dada por uma fórmula elementar, definida na faixa $0 \leq y \leq \pi$, que não seja limitada, mas que tome o valor zero no bordo da faixa.
 - (g) Seja $r(x) := \|x\|, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - (i) Encontre uma fórmula para as derivadas parciais de $r(x)$.
 - (ii) Calcule ∇r o gradiente de $r(x)$, e sua norma $\|\nabla r\|$.

- (iii) Seja $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Seja $f := h \circ r$. Deduza que

$$\Delta f = h'' \circ r + \frac{n-1}{r} h' \circ r$$

Conclua que $f(x) = r^{-n+2}$, $n \geq 3$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Conclua o mesmo para $f(x) = \ln r$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- (h) Sejam f, g duas harmônicas num domínio Ω . Deduza que o produto fg é também harmônica, se e só se $\nabla f \cdot \nabla g = 0$.
- (i) Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^n . Seja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ e harmônica em Ω . Deduza que o máximo e o mínimo de f é assumido no bordo $\partial\Omega$.

Sugestão:

Considere $g(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon x_1^2$, $\varepsilon > 0$

- (j) Sejam a, b números reais positivos. Considere o domínio $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 2 < \|x\| < 3\}$ ($n \geq 2$). Resolva o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = a & \text{se } \|x\| = 2 \\ u = b & \text{se } \|x\| = 3 \end{cases}$$

- (k) Seja f uma função harmônica de definida no disco perfurado $\{0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Seja

$h(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, $x^2 + y^2 > 1$. Discuta a harmonicidade ou não de $u(x, y) := f(h(x, y))$ no exterior do disco $x^2 + y^2 > 1$.

- (9) Encontre uma solução não trivial da equação

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$$

no quadrado aberto $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, dada por uma fórmula elementar, se anulando no bordo do quadrado. Determine o máximo global desta função.

- (10) Encontre uma E.D.P. de primeira ordem nas variáveis x, y da forma

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (*)$$

(pensando que $z(x, y)$ é uma função das variáveis x, y satisfazendo a equação $(*)$) cuja *superfícies integral* estão dadas por $xy + z^2 = c$, onde c é uma constante.

- (11) Assuma que $F(x, y, z) = 0$ define localmente implicitamente uma superfície que pode ser vista tanto como um gráfico vertical $z = f_1(x, y)$, ou como um gráfico horizontal das duas formas $x = f_2(y, z)$ ou $y = f_3(x, z)$. Mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$, interpretando.
- (12) Considere uma superfície de revolução em torno do eixo z da forma $z = F(r)$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Mostre que as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem uma EDP linear (homogênea) de primeira ordem da forma $yp - xq = 0$, onde $p = z_x$ e $q = z_y$.
- (13) Considere uma superfície que é localmente o gráfico de uma função $z(x, y)$ dada implicitamente por uma equação da forma $F(u, v) = 0$, onde $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ são funções dadas de x, y, z de classe C^1 , e F é uma função dada de u e de v de classe C^1 .
- (a) Dê exemplos de $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e F explícitas.
- (b) Mostre que $p = z_x$ e $q = z_y$ satisfazem uma E.D.P. de primeira ordem $p \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, onde
- $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x, \text{ etc..}$$
- Calcule explicitamente nos exemplos dados no item (a).
- (14) Seja $v = v(x, y)$ e $u = u(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$, sendo Ω um aberto de \mathbb{R}^2 . Admita que u, v sejam de classe C^1 . Assuma que $u = H(v)$, onde H é de classe C^1 .
- (a) Encontre $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e H explícitas. Veja, por exemplo, u e v satisfazendo $u^2 + v^2 = 1$ ou $v = u^2 - 3u + 2$.
- (b) Mostre que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$. Verifique esta relação nos exemplos obtidos em (a).
- (15) Seja A uma matriz $n \times n$. Seja $f(x) = Ax \cdot x$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e \cdot denota o produto escalar usual em \mathbb{R}^n . Encontre uma fórmula para $f'(x)$.

Segunda parte

- (16) Seja $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação multilinear, ou seja $B(x_1, \dots, x_n)$ é linear em cada variável. Deduza uma fórmula para a derivada de B em $a \in \mathbb{R}^n$ na direção de $h = (h_1, \dots, h_n)$. Generalize para $B : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Obtenha a derivada do determinante como consequência, comparando com (29)(f).

- (17) Generalize para o caso em que $E := E_1 \times \cdots \times E_n$, onde E_i é um espaço vetorial normado, $i = 1, \dots, n$, U é um aberto de E e $B : U \rightarrow F$ uma aplicação multilinear contínua de E sobre um espaço vetorial normado F .
- (18) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Seja L o eixo dos x .

- (a) Deduza que f é contínua em \mathbb{R}^2 .
- (b) Deduza que as derivadas parciais de f existem em \mathbb{R}^2 .
- (c) Deduza que f_x é contínua em \mathbb{R}^2 mais que f_y é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Deduza que f não é de classe C^1 .
- (d) Deduza que f é diferenciável em \mathbb{R}^2 , mostrando que nos pontos $(x, 0)$ a derivada é nula.
- (19) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Deduza que f é contínua se e só se $\alpha > 1$.
- (b) Deduza que f é diferenciável se e só se $\alpha > \frac{3}{2}$. Além disso, deduza que se $\alpha > \frac{3}{2}$ então f é de classe C^1 .

Sugestão: Para mostrar que f não é contínua na origem para $\alpha \leq 1$, use coordenadas polares. Para mostrar que f não é diferenciável para $\alpha \leq 3/2$ use também coordenadas polares.

- (20) Sejam $p, q \in \mathbb{R}^*$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Deduza que f é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 , se e só se $p + q > 3$.

- (21) Seja U um aberto de \mathbb{R}^k e sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas aplicações diferenciáveis. Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Defina $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ por $h(x) := B(f(x), g(x))$, $\forall x \in U$. Deduza uma fórmula para $Dh(a)h$, $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^k$. Generalize.
- (22) Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 . Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(u, v) = f(\alpha(u) + \beta(v), \beta(u) + \alpha(v), e^{uv})$, onde $\alpha, \beta :$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais diferenciáveis. Encontre uma fórmula para a derivada de g em (a, b) .

- (23) Seja $E = C^1[0, 1]$ o espaço vetorial normado das funções reais de classe C^1 definidas no intervalo $[0, 1]$, munido da norma $\|u\|_1 := \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |u'(x)|$.

Seja $F = C^0[0, 1]$ o espaço vetorial normado das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$, munido da norma $\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|$. Seja $\varphi : E \rightarrow F$ dada por $\varphi(u)(t) = u'(t) + tu^2(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Deduza que φ é diferenciável e que $D\varphi(u)h(t) = h'(t) + 2tu(t)h(t)$. Lembrete: lembre-se que é preciso mostrar a continuidade da transformação linear $D\varphi(u) : E \rightarrow F$.

Terceira parte

- (24) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Seja p um ponto crítico de f . Seja M a matrix hessiana de f em p .

Seja $Q(X) = M X \cdot X$, $X \in \mathbb{R}^n$ a forma quadrática associada.

Deduza, usando a *aproximação quadrática*:

- Se Q é positiva definida, i.e $Q(X) > 0$, se $X \neq 0$, então p é um ponto crítico não degenerado que é mínimo local estrito.
- Se Q é negativa definida, i.e $Q(X) < 0$, se $X \neq 0$, então p é um ponto crítico não degenerado que é máximo local estrito.
- Se Q é indefinida, i.e $\exists X; Q(X) > 0$ e $\exists Y; Q(Y) < 0$, então p não é nem ponto de máximo nem de mínimo local.
- Confira que a *signature* de Q é a dimensão máxima de um subespaço $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que Q restrita a W é negativa definida. A *signature* também é chamada de *index* de Q .
- Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja z um ponto crítico não degenerado de f . Seja Q a hessiana de f em z . O índice (local) de f em z , denotado por $\text{inf}_z(f)$, é o índice de Q .

Dê exemplos não triviais de tais funções f admitindo apenas pontos críticos não degenerados, calculando os seus índices locais em cada singularidade.

- (25) Seja $f(x, y) = \frac{x^4}{3} + \frac{y^4}{2} - 4xy^2 + 2x^2 + 2y^2 + 3$. Classifique os pontos críticos e deduza que f assume um mínimo global, calculando este valor mínimo. Use o MAPLE para esboçar as curvas

de nível de f e compare o comportamento das curvas numa vizinhança de um ponto crítico com a teoria.

- (26) Estude as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^4$, explicitando como a curva $f(x, y) = \lambda > 0$ se liga a curva $f(x, y) = \mu > 0$, mediante uma mudança de coordenadas.
- (27) Suponha que uma função real $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 definida numa vizinhança da origem satisfaça:
- A origem é um ponto crítico não degenerado.
Estude a geometria das curvas de nível $f(x, y) = c$, numa vizinhança da origem. *Sugestão:* Use o Lema de Morse.
 - A origem é um ponto crítico degenerado.
Dê exemplos de funções satisfazendo:
 - A origem não é nem máximo nem mínimo local.
 - A origem é um mínimo local.
 - A origem é um ponto crítico isolado tipo “sela de macaco”.
 - O conjunto dos pontos críticos é uma subvariedade de dimensão 1 de \mathbb{R}^2 .
 - O conjunto dos pontos críticos não é isolado e não é uma subvariedade de \mathbb{R}^2 .
 - Agora considere $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dê um exemplo em que a origem não é um ponto crítico isolado, mas numa vizinhança perfurada da origem, os conjunto dos pontos críticos é discreto.
- (28) Uma função suave $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *função de Morse*, se todos os pontos críticos de f são não degenerados. Se são em número finito, o índice (total) de f , denotado por $\text{Ind}(f)$ está definido por

$$\text{Ind}(f) = \sum_z (-1)^{\text{inf}_z(f)}$$

onde z é um ponto crítico de f e $\text{inf}_z(f)$ é o índice de f em z , definido no exercício precedente. Logo

$$\text{Ind}(f) = \sum_k (-1)^k \alpha_k$$

onde α_k é o número de pontos críticos de índice k .

OBS: Funções de Morse existem em abundância, mesmo definidas em variedades diferenciáveis. A noção de índice se estende naturalmente para campos de vetores em variedades diferenciáveis com singularidades (zeros) isoladas:

Um teorema belíssimo em Topologia Diferencial une o índice total de um campo de vetores suave definido numa variedade compacta (sem bordo), com finitas singularidades, com um invariante topológico chamado de *característica de Euler*. De fato, seja M uma variedade compacta e seja v um campo suave de vetores com zeros isolados. Segue que

$$\sum \iota = \chi(M)$$

onde $\sum \iota$ é a soma dos índices nos zeros de v e $\chi(M)$ é a característica de Euler de M . Em particular, $\sum \iota$ é um invariante topológico.

O invariante $\chi(M)$ pode ser definida em termo dos grupos de homologia de M . Para superfícies compactas de \mathbb{R}^3 , por exemplo, $\chi(M) = 2 - 2g$, onde g é o gênero da superfície. Para a esfera \mathbb{S}^2 , $g = 0$, para o toro \mathbb{T}^2 , $g = 1$, para o bitoro, $g = 2$, etc...

Fazendo uma “triangulação” de uma superfície compacta vale a fórmula $\chi(M) = F - A + V$, onde F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices.

Duas superfícies compactas de \mathbb{R}^3 são homeomorfas, se e só se tem a mesma característica de Euler.

- (a) Suponha que uma função real $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 definida numa vizinhança da origem satisfaça:

A origem é um ponto crítico não degenerado.

Estude a geometria das superfícies de nível $f(x, y, z) = c$, numa vizinhança da origem. *Sugestão:* Use o Lema de Morse.

Quarta parte

- (29) A finalidade deste exercício é estudar a diferenciabilidade do determinante de uma matriz A , $n \times n$ para tirar consequências disto.

- (a) Dando um argumento simples e direto deduza que o determinante definido em $M(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ identificado com \mathbb{R}^{n^2} , é uma função de classe C^∞ .

- (b) Recorde o seguinte fato de Álgebra Linear: O determinante de uma matriz A , $n \times n$, denotado por $|A|$ ou por $\det A$, é obtido pela expansão de $|A|$ pelos cofatores da j -ésima coluna (linha). Vale a seguinte fórmula. Seja α é a matriz dos cofatores, i.e $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A^{(ij)}|$, onde $A^{(ij)}$ é a matriz

$(n-1) \times (n-1)$ obtida de A eliminando a i -ésima linha e a j ésima coluna, sendo $|A^{(ij)}|$ o determinante de $A^{(ij)}$. Segue: $\alpha^t A = |A| I$, onde α^t é a transposta de α e I é a matriz identidade $n \times n$. Daí segue uma fórmula para a inversa de A quando A é inversível.

- (c) Seja H uma matriz $n \times n$ e seja $t \in \mathbb{R}$. Deduza que

$$\det(I + tH) = 1 + t \operatorname{tr} H + O(t^2)$$

quando $t \rightarrow 0$.

onde tr indica o traço. Conclua que $D \det(I)H = \operatorname{tr} H$.

- (d) Quando A é uma matriz inversível deduza que

$$\det(A + H) = \det A + \operatorname{tr}(\alpha^t H) + o(\|H\|)$$

Conclua que $D \det(A)H = \operatorname{tr}(\alpha^t H)$.

- (e) Deduza que o conjunto das matrizes inversíveis $n \times n$ é um aberto e denso do conjunto das matrizes $n \times n$. Deduza que a aplicação $A \rightarrow \alpha$ que associa uma matriz A a matriz dos cofatores α é de classe C^∞ .

Conclua que a fórmula para a derivada obtida no item anterior para uma matriz inversível A se estende a todo o espaço das matrizes $n \times n$.

- (f) Seja $X = (x_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Escrevendo a fórmula $\det X = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$, desenvolvendo o determinante segundo a i -ésima linha, onde α é a matriz dos cofatores de X , deduza que $\frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = \alpha_{ij}$. Conclua daí que $D \det(A)H = \operatorname{tr}(\alpha^t H)$.

- (g) Conclua que todo número real positivo c é valor regular para a função determinante restrita ao conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis $n \times n$, mostrando que $GL(n, \mathbb{R})$ é um aberto de $M(n, \mathbb{R})$.

Deduza que o grupo $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ é uma subvariedade de dimensão $n^2 - 1$, hipersuperfície, de R^{n^2} , onde R^{n^2} está identificado com o conjunto das matrizes $n \times n$.

- (h) Seja $\operatorname{Inv} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ a aplicação que associa uma matriz inversível A sua inversa $\operatorname{Inv}(A) = A^{-1}$. Deduza que Inv é de classe C^∞ . Usando a fórmula $(I - X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$, para $\|X\| < 1$, onde X é matriz $n \times n$, intua a fórmula para $D \operatorname{Inv}(A)H$.

- (30) Seja $M(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ identificado com \mathbb{R}^{n^2} e seja $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$ identificado com $\mathbb{R}^{(n^2+n)/2}$.

Seja $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$, dada por $f(X) = XX^t$.

- (a) Deduza que f é de classe C^∞ .
 (b) Deduza que $f'(X) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ satisfaz $f'(X)H = XH^t + HX^t$, onde $H \in M(n, \mathbb{R})$.
 (c) Deduza que se $X \in f^{-1}(I) := O(n, \mathbb{R})$, então $f'(X) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ é sobrejetora. *Sugestão:* Tome $H = \frac{SX}{2}$, onde S é uma matriz simétrica dada.

Daí, conclua que $O(n, \mathbb{R})$, o grupo ortogonal, é uma subvariedade compacta de dimensão $(n^2 - n)/2$ de $M(n, \mathbb{R})$.

- (31) Seja $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Deduza que a derivada $f'(x, y, z)$ tem posto 3, se $xyz \neq 0$.

- (32) Seja $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Deduza que um real c , $c \neq 0$ é valor regular de f , concluindo que para $c \neq 0$, $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^∞ de \mathbb{R}^3 . Neste caso, encontre um campo normal não nulo N à $f^{-1}(c)$ (*i.e* normal ao plano tangente de $f^{-1}(c)$, em cada ponto, *i.e* ortogonal a todo vetor velocidade de uma curva em $f^{-1}(c)$, no ponto considerado). Usando o MAPLE, esboce alguns desenhos para alguns valores de c . Estude o caso $f^{-1}(0)$. *Sugestão:* $f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

- (33) Seja $f(x, y, z) = (x^2 + 2xz - 2yz - y^2, 2x - y + z)$. Deduza que $(0, a)$, $a \neq 0$ é um valor regular de f e $(0, 0)$ é um valor singular. Descreva inteiramente $f^{-1}(0, a)$, $a \neq 0$, mostrando, em particular, que $f^{-1}(0, a)$, $a \neq 0$ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão 1 de \mathbb{R}^3 não conexa. Calcule campos normais independentes N_1 e N_2 à variedade $f^{-1}(0, a)$, $a \neq 0$.

Mostre que $f^{-1}(0, 0)$ é a união de duas retas concorrentes, logo, não é uma variedade topológica de dimensão 1. *Sugestão:* $x^2 + 2xz - 2yz - y^2 = (x - y)(x + y + 2z)$.

- (34) Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Encontre condições suficientes sobre as derivadas parciais $\partial g / \partial x_j$, de modo que a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) := x + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ produza um homeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n .

- (35) Seja a um parâmetro real. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais definidas num intervalo da reta I . Considere o sistema

$$\begin{aligned}x + a \sin(x + y) + f(t) &= 0 \\y + a \cos(x - y) + g(t) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

- (a) Determine um intervalo J da reta para o qual vale que se $a \in J$, então para cada t fixado, o sistema (1) tem uma única solução.
- (b) Encontre várias funções $f(t), g(t)$ Lipschitz no intervalo I para as quais existe solução x_t de (1), $\forall t \in I$. Além disso, deduza que para as escolhas feitas a aplicação $t \mapsto x_t$ também é Lipschitz.
- (c) Encontre várias funções $f(t), g(t)$ ξ -Hölder contínuas $\xi = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ para as quais existe solução x_t de (1), $\forall t \in I$. Além disso, deduza que para as escolhas feitas a aplicação $t \mapsto x_t$ se $x_t, t \in I$ também é ξ -Hölder contínua, para $\xi = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- (d) Use o MAPLE e o método das aproximações sucessivas para encontrar uma aproximação da solução para algumas escolhas de $f(t)$, $g(t)$ e alguns valores de a e de t .
- (36) Seja a um parâmetro real. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções reais definidas num intervalo da reta I . Considere o sistema

$$\begin{aligned}x + a \sin x \cos y + f(t) &= 0 \\y + a \sin y \cos x + g(t) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

- (a) Determine um intervalo J da reta para o qual vale que se $a \in J$, então para cada t fixado, $t \in I$, o sistema (2) tem uma única solução.
- (b) Encontre várias funções $f(t), g(t)$ Lipschitz na reta real \mathbb{R} , tanto limitadas quanto ilimitadas para as quais existe solução x_t de (2), $\forall t \in \mathbb{R}$. Além disso, deduza que para as escolhas feitas a aplicação $t \mapsto x_t$ também é Lipschitz.
- (c) Encontre várias funções $f(t), g(t)$ ξ -Hölder contínuas $\xi = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, em toda reta \mathbb{R} para as quais existe solução x_t de (2), $\forall t \in \mathbb{R}$. Além disso, deduza que para as escolhas feitas a aplicação $t \mapsto x_t$ se $x_t, t \in \mathbb{R}$ também é ξ -Hölder contínua, para $\xi = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- (d) Use o MAPLE e o método das aproximações sucessivas para encontrar uma aproximação da solução para algumas escolhas de $f(t)$, $g(t)$ e alguns valores de a e de t .
- (37) Dê exemplos de mudança de coordenadas não lineares “curvilíneas” definidas em abertos de \mathbb{R}^2 . Idem para abertos de \mathbb{R}^3 .
- (38) Seja A um aberto de \mathbb{R}^n e seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k . Seja B um aberto de \mathbb{R}^m , $f(A) \subset B$. Seja $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função de classe C^k . Deduza que a composta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ também é de classe C^k .
- (39) Seja \mathbb{T}^2 o toro de revolução em \mathbb{R}^3 obtido pela rotação do círculo $(x-2)^2 + y^2 = 1$ no plano xy em torno do eixo y .
- (a) Descreva \mathbb{T}^2 como imagem inversa de um valor regular, concluindo que \mathbb{T}^2 é uma superfície compacta suave.
- (b) Analise com detalhes a função altura $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela função restrita a \mathbb{T}^2 , $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 \mapsto h(x, y, z) = z$, deduzindo que h é suave. Identifique todos os pontos críticos de h , interpretando geometricamente.
- (c) Deduza que os pontos críticos de h são não degenerados, calculando os seus índices. Calcule a soma total dos índices de h , dada por (confira no exercício (28)):

$$\text{Ind}(f) = \sum_z (-1)^{\text{inf}_z(f)}$$

Discuta o resultado.

- (40) Seja I um intervalo da reta e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^2 . Seja $x_0 \in I$. Defina:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ f'(x) & \text{se } x = y \end{cases}$$

- (a) Escreva o desenvolvimento limitado de f de ordem 2 em $x = x_0 \in I$.
- (b) Deduza que g é contínua e calcule $g(x_0, x_0)$.
- (c) Defina $R(t) = f(x_0 + t) - f(x_0) - tf'(x_0) - \frac{t^2}{2}f''(x_0)$, para t numa vizinhança de 0. Deduza que $R(t)$ é de classe C^1 e que $R'(0) = 0$.
- (d) Seja h, k tal que $x_0 + h$ e $x_0 + k$ estão em I . Deduza que

$$g(x_0 + h, x_0 + k) - g(x_0, x_0) = \frac{h + k}{2} f''(x_0) + o(h + k)$$

- (e) Calcule $g'(x_0, x_0)(h, k)$, para $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, e deduza que $g(x, y)$ é diferenciável para todo $(x, y) \in I \times I$. Deduza que g é de classe C^1 .
- (41) Considere o aberto $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.
Defina $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$, onde a é uma constante real positiva ($a > 0$).
- (a) Deduza que f é de classe C^∞ .
- (b) Deduza que f possui um único ponto crítico. Calcule o valor de f no ponto crítico.
- (c) Calcule a matrix hessiana de f no ponto crítico e mostre que este não é degenerado. Deduza a natureza do ponto crítico.
- (d) f admite um máximo global? f admite um mínimo global?