LISTA 3 DE ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$ 2011

RICARDO SA EARP

Teoremas da função inversa, implícita e posto constante

(1) Considere a equação

$$F(x,y,z) = e^z\left(x^2+y^2+z^2\right) - (1+z^2)^{1/2} + y = 0 \tag{1}$$

Deduza que numa vizinhança de $(1,0,0)$ o conjunto $F^{-1}(0)$, é um gráfico vertical da forma $\{(x,y,z),\ z=f(x,y)\}$ de classe C^∞. Encontre o normal ao gráfico no ponto $(1,0,0)$.

Encontre todas as soluções de $F(x,y,z) = 0$, numa vizinhança pequena de $(1,0,0)$.

(2) Considere $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$, onde

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2 + \dfrac{y^2}{2} + z^3 - z^2 \\ F_2(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3y + z \end{cases}$$

Deduza que numa vizinhança de $(-1,1,0)$, o conjunto $F^{-1}\{(3/2,-3)\}$ é uma curva regular, que admite uma parametrização de classe C^∞ da forma $t \mapsto (t, f(t), g(t))$, numa vizinhança de $t=-1$. Calcule o vetor velocidade da curva em $t=-1$.

Encontre todas as soluções de $F(x,y,z) = (\frac{3}{2},-3)$, numa vizinhança pequena de $(-1,1,0)$.

(3) Para cada t real, considere o sistema dado por

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Deduza pelo teorema da função implícita para famílias α-contrativas que o sistema admite uma única solução $x = x(t)$ e $y = y(t)$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas de t.
Você pode dizer mais sobre a regularidade da curva $t \mapsto (x(t), y(t))$?

(b) Usando o teorema clássico das funções implícitas deduza que a curva $t \mapsto (x(t), y(t))$ é de classe C^∞.

(c) Dê o desenvolvimento limitado de ordem 2 de x e y em (2), no ponto $x = 0$ e $y = 0$, e fazendo $h = t - 1$ obtenha $(x, y) = h(a, b) - h^2(c, d) + O(h^3)$, onde as constantes a, b, c, d são a determinar.
Usando isto, faça um esboço do gráfico da curva $t \mapsto (x(t), y(t))$, numa vizinhaça de $t = 1$.
Deduza que a curva um gráfico vertical numa vizinhança de $t = 1$, explicando.

(d) Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $(x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda)$ de classe C^1. Assuma que existe uma constante $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\|D_x f(x, \lambda)\| \leqslant \alpha, \, \forall (x, \lambda)$$

(i) Deduza que para cada λ, a equação $x = F(x, \lambda)$ admite uma única solução $x = x(\lambda)$ que depende continuamente de λ.
(ii) Deduza que a aplicação $\lambda \mapsto x(\lambda)$ é de classe C^1.
(iii) Calcule $Dx(\lambda) = x'(\lambda)$.

(4) Seja A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se $\nabla f(a) \neq 0$, $a \in A$; deduza que existem funções $f_2, \ldots, f_n$ em $C^1(A)$, tais que $(f, f_2, \ldots, f_n)$, constitue um "sistema de coordenadas locais" numa vizinhança de a.

(5) Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.Seja $f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$. Seja $S = \{(x, y, z);\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Interprete geometricamente o ínfimo de f restrita a S.

(6) Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sejam $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots n$, números reais não nulos satisfazendo $\sum_i \alpha_i = 1$. . Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, x_i > 0,\, i = 1, \ldots, n\}$. Seja $f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $x \in \Omega$. seja $g(x) = \sum_i \alpha_i x_i$, $x \in \Omega$.

Encontre o sup de f restrita $g = 1$ Deduza a desigualdade de Jensen: Sejam $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots n$, satisfazendo $\sum_i \alpha_i = 1$. Segue:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_i \alpha_i x_i, \; x_i > 0, \; i = 1, \ldots, n$$

com a igualdade ocorrendo se e so se $x_1 = \cdots = x_n$.

(7) Seja $M(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$. Seja
$F : M(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(A, \lambda) = \det(\lambda\, I_{\mathbb{R}^n} - A)$.

(a) Deduza que F é de classe C^∞.

(b) Dizemos que um autovalor real de uma matriz $n \times n$ A é simples, se $\dfrac{\partial F(A,\lambda)}{\partial \lambda} \neq 0$. Seja λ um autovalor real simples de A.
Mostre que existe uma vizinhança aberta V de A e uma função $\varphi : V \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ tal que $\varphi(A) = \lambda$ e para toda matriz $B \in V$, $\varphi(B)$, é um autovalor real de B.

(c) Seja U o subconjunto de $M(n, \mathbb{R})$ constituído das matrizes que tem n autovalores reais dois a dois distintos. Deduza que U é um aberto de $M(n, \mathbb{R})$.

(d) Seja $A \in U$ e sejam $\lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \cdots < \lambda_n(A)$ os autovalores de A arrumados em ordem crescente. Deduza que $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, é uma função de classe C^∞.

(8) Considere $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, dada por
$F(x,y,z,t) = (F_1(x,y,z,t), F_2(x,y,z,t), F_3(x,y,z,t))$, onde

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^2 \\ F_2(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t \\ F_3(x,y,z,t) = x + y + z + t \end{cases}$$

Estude o conjunto $F^{-1}(0,2,0)$, numa vizinhança de $(0,-1,1,0)$, e obtenha todas as soluções de $F(x,y,z,t) = (0,2,0)$, numa vizinhança de $(0,-1,1,0)$.

(9) Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - (\sqrt{x^2+y^2} + x)$.

(a) Deduza que a 0 é um ponto regular para a restrição $\overline{g}$ de g à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, concluindo que $\overline{g}^{-1}(0)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1.

Considere a curva C dada por

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - (\sqrt{x^2+y^2} + x) = 0$$

(b) Determine os pontos (x,y) da curva C onde a função coordenada x tem um máximo ou mínimo local.
Escreva a equação de C em coordenadas polares e interprete geometricamente o resultado.

(10) Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. Considere A como um endomorfismo autoajunto de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, onde $\mathbb{R}^n$ está munido de seu produto interno usual $\langle , \rangle$.
Seja $\mathbb{S}^{n-1}$ a esfera unitária dada por $\langle x, x \rangle = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Defina $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Deduza que os pontos de $\mathbb{S}$ onde f assume um máximo ou mínimo local são autovetores de A. Reciprocamente, deduza que os autovetores de A são pontos críticos da função f restrita à $\mathbb{S}^{n-1}$.