

LISTA EXERCÍCIOS DE INTEGRAIS TRIPLAS

PROFESSOR: RICARDO SÁ EARP

- (1) Fazer exercícios 3:(b), (c), (d) da seção 4.1.4 pg 99 do livro texto.
- (2) Fazer exercícios 2: (b), (c), 3:(b), (c), (d) da seção 4.2.5 pg 106 do livro texto.
- (3) Fazer exercícios, 2:(a),(b), 3:(b), (d) 4:(b) da seção 5.2.3 pgs 121, 122 do livro texto.
- (4) Fazer exercícios 1, 2, 5 da seção 5.3.4 pg 124 do livro texto.
- (5) Fazer exercícios 1:(b), (c), 2(a), (b), (c), 3, da seção 5.4.3, pg 132 do livro texto.
- (6) Fazer exercícios 1, da seção 5.5.3 pg 137 do livro texto.
- (7) Fazer exercícios 2, 3, 5,6,7,8 da seção 5.6 pg 138 do livro texto.
- (8) Considere U a região de \mathbb{R}^3 que está contida na interseção das seguintes três regiões. Região entre os planos $z = 2$ e $z = -2$, região no interior do cone $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ (i.e região contendo o eixo de revolução) e região no interior do semi-espaço dado por $\{y \geq 0\}$. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
 - (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U .
 - (b) Descreva U usando desigualdades.
 - (c) Calcule $I := \iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$ como soma $I = \iiint_{U_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{U_2} f(x, y, z) dx dy dz$ de duas integrais triplas em duas regiões U_1 e U_2 de \mathbb{R}^3 de mesmo volume, sendo que U_1 está contida no semi-espaço superior $\{z \geq 0\}$.
 - (d) Deduza que $I = \frac{16\pi}{5}$.
 - (e) Usando a mesma região de integração do item precedente re-escreva a integral tripla $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$,
 - (i) usando integrais iteradas nas coordenadas cartesianas ou retangulares, *de duas maneiras distintas*.
 - (ii) usando coordenadas cilíndricas.
 - (f) Usando a mesma região U anterior fazendo um cálculo explícito mostre que para $f(x, y, z) = x y \sin z$, a integral tripla $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = 0$. Idem para $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$. Deduza destes exemplos um argumento geométrico, que seja aplicado a situações mais gerais, exibindo novos exemplos em que $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = 0$.

- (g) Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq z \leq 2\}$.
Seja $f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Deduza, usando um argumento que a integral tripla $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \frac{16\pi}{5}$, independente de a e b .
- (9) Seja U a região do espaço no primeiro octante interior à esfera de raio 2 centrada na origem. Seja $f(x, y, z) = z^2$.
- (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U .
- (b) Deduza que $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \frac{16\pi}{15}$.
- (c) Compare o resultado precedente com a integral da mesma função sobre *toda a bola* de raio 2 centrada na origem explicando o resultado, por um argumento geométrico.

- (10) Considere U a região do espaço dada por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

- (a) (i) Escreva a fórmula integral que expresse o volume V da região U -usando coordenadas cilíndricas.
(ii) Escreva a fórmula integral que expresse o volume V da região U -usando coordenadas esféricas.
- (b) Calcule o volume V de U , usando integral tripla (o sistema de coordenadas é de sua escolha), fazendo todos os cálculos.
Resposta: $V = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$. (1).
- (c) Seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o centróide da região U . Calcule \bar{x} , escrevendo todos os cálculos. Resposta: $\bar{x} = 9/8$.

- (11) Idem exercício anterior considerando a região U dada por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 3/\sqrt{2}\}$$

- (12) Idem exercício anterior considerando a região U dada por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 9, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

- (13) Seja

$$I = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$$

- (a) Determine o domínio de integração U da integral tripla (na forma acima de uma integral iterada (Fubini)), usando desigualdades.
- (b) Calcule o volume de U . Agora, dado λ um número real positivo, seja $U_\lambda := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u = \lambda x, v = \lambda y, w = \lambda z, (x, y, z) \in U\}$
- (i) Calcule o volume de U_λ em termo do volume de U e justifique sua resposta usando um argumento geométrico.

(ii) Seja

$$I_\lambda = \iiint_{U_\lambda} w\sqrt{u^2 + v^2} \, dudvdw$$

Calcule I_λ , em termo de I , fazendo uma mudança de variáveis conveniente (não precisa usar o cálculo de I).

(iii) Generalize, usando suas palavras e um argumento com base no que foi feito acima, no caso geral em que U é uma região qualquer fechada do espaço.(c) Calcule I .(14) Seja U a região no interior da esfera de raio a satisfazendo $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (primeiro octante). Considere

$$f(x, y, z) = xyz(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \text{ e } I = \iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

(a) Escreva I usando integrais iteradas nas coordenadas cartesianas ou retangulares.(b) Escreva I usando coordenadas esféricas.(c) Calcule I . Resposta: $I = a^5/40$.(d) Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcule sem fazer nova conta $\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz$.(e) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcule sem fazer nova conta, $\iiint_W f(x, y, z) \, dx dy dz$.(15) Considere $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{4x^2 + 4y^2} \leq z \leq \sqrt{3 - x^2 - y^2}\}$.(a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U .(b) Escreva U usando coordenadas cilíndricas.(c) Escreva o volume de U usando integrais iteradas usando coordenadas cartesianas ou retangulares.(d) Escreva o volume de U na forma $\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} r \, dz d\theta dr$.(e) Escreva o volume de U na soma de duas integrais da forma $2\pi \int_{z_1}^{z_2} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} r \, dr dz$.(f) Escreva o volume de U usando coordenadas esféricas.(g) Calcule o volume de U . Resposta: $\text{vol}(U) = 2\pi(\sqrt{3} - \frac{16}{15}\sqrt{2})$.(16) Seja região do espaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}$. Seja $g(x, y, z)$ uma função real suave. Considere a integral tripla

$$I = \iiint_U g(x, y, z) \, dV.$$

(a) Escreva a integral tripla I na forma $\int_a^b \int_{R(z)} dx dy dz$, onde

a, b são constantes a determinar e $R(z)$ é uma região plana a determinar.

- (b) Expresse I usando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .
- (c) Escreva I usando obrigatoriamente coordenadas esféricas.
- (d) Calcule o volume de I testando ambas fórmulas obtidas em (b) e (c) acima. Resposta: 9π .
- (17) Seja U a região delimitada pelos planos $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$ e $2x-z=1$.
- (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U .
- (b) Calcule a integral
- $$I = \iiint_U (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z) dx dy dz. \text{ Resposta: } I = \frac{1}{180}.$$
- (18) Calcule o volume da porção, digamos U , da bola fechada $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=2y$, desenhando corretamente a região determinada. Resposta: $\text{vol}(U) = \frac{2}{3}\pi 2^3 - \frac{64}{9}$.
- (19) Seja U a região delimitada pelo elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $a \geq b \geq c > 0$.
- (a) Elabore um desenho preciso e bem feito da região U .
- (b) Seja $f(x, y, z) = (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2)^{3/2}$. Calcule $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$. Resposta: $I = \frac{1}{8}\pi^2 abc$.
- (20) (a) Deduza que a altura \bar{z} do centróide da região delimitada pela esfera de raio a centrada na origem, contida no primeiro octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ é $\bar{z} = \frac{3}{8}a$. Em seguida usando um argumento geométrico, calcule as outras coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centróide.
- (b) Seja dado o número real λ . Seja \bar{z} a altura do centróide de U . Seja $U_\lambda = \{(u, v, w); u = \lambda x + 1, v = \lambda y + 2, w = \lambda z + 1/2, (x, y, z) \in U\}$. Determine λ em termo de \bar{z} , e de a de maneira que a terceira coordenada \bar{w} do centróide de U_λ seja igual a 1.
- (21) Considere a região $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 7 \leq z \leq \frac{x-1+y-2}{(x-1)^2+(y-2)^2} + 7, x \geq 1, y \geq 2, 1 \leq x-1+y-2 \leq 2\}$. Elabore um desenho esquemático da região U e calcule o volume V de U . Resposta: $V = \pi/2$.