LISTA DE EXERCÍCIOS DE CAMPOS CONSERVATIVOS NO PLANO E NO ESPAÇO. CURVAS PARAMETRIZADAS, INTEGRAIS DE LINHA (COM RESPEITO A COMPRIMENTO DE ARCO).

PROFESSOR: RICARDO SÁ EARP

OBS: *Faça os exercícios sobre campos conservativos em primeiro lugar.*

(1) Fazer exercícios 1:(c), 2:(b),(c), (e), 3, 5, 6, 7, 8 da seção 7.1.3 pgs 162, 163 do livro texto.
(2) Fazer exercícios 1: (c), 2 da seção 7.2.4, pg 167 do livro texto.
(3) Fazer exercícios 2, 4, 5:(b), (c) da seção 7.3.3 pg 171 do livro texto.
(4) Fazer exercícios 1: (b), (c), (d), 2:(b), (c), (d) da seção 8.2.3 pg 178 do livro texto.
(5) Fazer exercícios 4:(b), 5, 6, 7 da seção 8.3.4 pg 181 do livro texto.
(6) Determine, *sem calcular explicitamente o potencial*, se os campos F abaixo são conservativos ou não. Em seguida à verificação, no caso afirmativo, calcule explícitamente os potenciais ou funções potenciais associada f.
   (a) $F(x,y) = \left(\dfrac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{x(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\right)$. Resposta: $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + C, C \in \mathbb{R}$.
   (b) $F(x,y) = \left(\ln(y^2+1) + y^3 + y, \frac{2y(x-1)}{y^2+1} + \arctan x\right)$.
   (c) $F(x,y) = \left(\ln(y^2+1), \frac{2y(x-1)}{y^2+1}\right)$.
   Resposta: $f(x,y) = (x-1)\ln(y^2+1) + C$.
   (d) $F(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$.
   Resposta: $f(x,y,z) = xy + yz + zx + C$.
   (e) $F(x,y,z) = (y+z, x-z, x+y^3)$.
   (f) $F(x,y) = (7 + y^2 - 3x^2, e^y + 2xy + 1)$.
   Resposta: $f(x,y) = -x^3 + xy^2 + 7x + e^y + y + C$.
   (g) $F(x,y,z) = (\cos y + 2xy^2z^2, -x \operatorname{sen} y + e^z + 2yx^2z^2, ye^z + 2y^2x^2z)$.
   Resposta: $f(x,y,z) = x\cos y + ye^z + x^2y^2z^2 + C$.
   (h) $F(x,y,z) = (\cos y + yz, -x\operatorname{sen} y + e^z + xz, ye^z + xy + h(z))$, para $h(z) = \operatorname{sen} z + z\cos z$, $h(z) = \operatorname{sen}^4 z \cos z$, e $h(z) = e^z \operatorname{sen}(z) + z^2 e^{-2z^3}$. Conclua um resultado para uma dada $h(z)$ geral.

(7) Considere o campo F em $\mathbb{R}^2$ dado por
$F(x,y) = (8 + y^2 - 3x^2, e^y + 2xy + ye^{-2y})$.
  (a) Determine se $F(x,y)$ é conservativo ou não.
  (b) Encontre *todas* as funções potenciais associadas à F (caso existam); *verificando por um cálculo direto a sua resposta.*
  Resposta: $f(x,y) = 8x + xy^2 - x^3 + e^y - \dfrac{ye^{-2y}}{2} - \dfrac{e^{-2y}}{4} + C, C \in \mathbb{R}$.
  (c) (i) Seja $F(x,y,z)$ um campo suave dado por
  $F(x,y,z) = (x+y+z+e^{zh(z)}, x+y+z, x+y+xe^{zh(z)})$.
  Determine uma função $h(z)$, caso seja possível, para a qual $F(x,y,z)$ é conservativo.
  (ii) Seja $G(x,y,z)$ um campo suave dado por
  $G(x,y,z) = (x+y+z+h(z), x+y+z, x+y+xh(z))$.
  Determine todas funções $h(z)$, caso seja possível, para as quais $G(x,y,z)$ é conservativo.
  (iii) Seja $W(x,y,z)$ um campo suave dado por
  $W(x,y,z) = (2xy, x^2 + z\cos(yz), y\cos(yz))$. Determine todos os potenciais de W, caso existam.
  (iv) Seja $F(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy} + \cos z, \dfrac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} - y \operatorname{sen} z)$.
  Determine se $F(x,y,z)$ é conservativo ou não. Caso afirmativo, calcule todos os potenciais $f(x,y,z)$ associados ao campo $F(x,y,z)$.

(8) Considere o campo F em $\mathbb{R}^3$ dado por
$F(x,y,z) = (yz, zw(x) + g(x), yh(x) + g(x))$, onde $w(t), g(t), h(t)$ são funções reais suaves de uma variável real t definidas para todos os valores de t. Encontre todas tais w, g, h de modo que F seja conservativo. Encontre todas as funções potenciais $f(x,y,z)$ de F.

(9) (*Fatores integrantes*)
  (a) Seja Ω o primeiro quadrante aberto de $\mathbb{R}^2$ (que é um domínio simplesmente conexo). Considere o campo dado por
  $F(x,y,z) = (1/(x^2y), 1/(xy^2), -1/(x^2y^2))$.
  (i) Mostre que $F(x,y,z)$ não é conservativo.
  (ii) Mostre que existe uma função suave $\alpha(t)$ (na verdade existe uma família a 1-parâmetro de funções) de uma variável real t de modo que $G(x,y,z) := \alpha(xy)F(x,y,z)$ é conservativo. A função $\alpha(t)$ satisfará uma E.D.O linear de primeira ordem e $\alpha(xy)$ é positiva em Ω; chamada de *fator integrante.* Para uma escolha de tal α calcule todas as funções potenciais de $G(x,y,z)$.
  (b) Considere o campo suave F em $\mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (y^2/2 - 2y\mathrm{e}^x, y - \mathrm{e}^x)$. Mostre que existe uma (família de)

função real $\mu(x,y)$ (chamada de *fator integrante*) tal que $G(x,y) := \mu(x,y)F(x,y)$ é conservativo. *Sugestão*: Tal μ satisfará a uma E.D.P linear de primeira ordem, e verifica-se que tal equação admite uma *certa função exponencial* como solução. Para uma escolha de tal μ, encontre todas as funções potenciais de $G(x,y,z)$.

(c) Considere o campo $F(x,y) = (x^2+y^2+1, -2xy)$. Deduza que existe uma fator integrante $\mu(x^2-y^2)$ onde $\mu(t)$ é uma função real da variável real t.

(10) Considere a superfície D_1 definida a seguir (esboce um desenho):

$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x+y+7,\ x^2+y^2 \leqslant 9\}$$

Considere C_1 a curva do bordo (fronteira) da superfície D_1 (positivamente orientada).

(a) Exiba uma *parametrização* de C_1, *explicitando* o domínio. Calcule o vetor velocidade e determine a sua norma. Escreva uma fórmula, usando uma integral definida numa variável real, que dá o comprimento da curva.

(11) Analisando cada curva parametrizada plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ (onde I é um intervalo da reta) abaixo, determine o vetor velocidade (ou vetor tangente) $V(t)$, quando $V(t) \neq 0$ determine um *vetor unitário normal* n (i.e $n \cdot V = 0, \|n\| = 1$) e determine uma curva plana C, estabelecendo a relação entre x e y, que, contenha o *traço* ou imagem de α (i.e $\alpha(I) \subset C$). Determine os pontos (caso existirem) onde a reta tangente é *horizontal ou vertical*. Desenhe α corretamente, indicando no desenho o *sentido* ou orientação do movimento (quando $V \neq 0$). *Verifique sua resposta.*

(a) $x(t) = 2\cosh(t), y(t) = 3\ \mathrm{senh}(t)(t \in \mathbb{R})$.
(b) $x(t) = t+1, y(t) = t^2+t(t \in \mathbb{R})$.
(c) $x(t) = t^3, y(t) = t^2(t \in \mathbb{R})$.
(d) $x(t) = t^3-4t, y(t) = t^2-4, t \in (-\infty, 0]$.
(e) $x(t) = 3\cos^3(t)/2, y(t) = -3\ \mathrm{sen}^3(t), \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$.

(12) Considere a curva C_1 dada por $t \mapsto \alpha(t) = \Big(\cos(2t)(1+\cos(2t)), \mathrm{sen}(2t)(1+\cos(2t))\Big)$, $t \in [0,\pi]$. Encontre um ponto da curva C_1 no semi-plano superior $y > 0$, cujo vetor velocidade $V(t) = \alpha'(t)$ é *horizontal*, i.e a ordenada do vetor velocidade $V(t)$ é nula (ou ainda $V \cdot (0,1) = 0$; o *ponto* denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$).Resposta: $\alpha(\pi/6) = (3/4, 3\sqrt{3}/4)$

(13) Calcule o comprimento l do cardióide dado em coordenadas polares por $r = 1+\cos\theta$ (com $\theta \in [0,2\pi]$). Resposta: $l = 8$.

(14) Considere a curva parametrizada α dada por $x(t) = 3\cos t, y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t, z(t) = t^2$, $\quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ Calcule o comprimento l da curva parametrizada α. Resposta: $l = \dfrac{1}{4}\left[2\sqrt{13} + 9\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\right]$.

(15) Determine uma superfície S que contenha o traço ou imagem de cada curva parametrizada α abaixo.
(a) $x(t) = 3\cos t, y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t, z(t) = t^2$.
(b) $t \mapsto (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t \cos t)$. Veja Figuras 1 e 2.

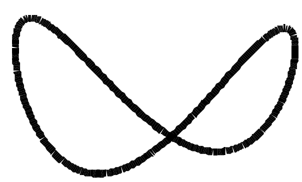

Figura 1

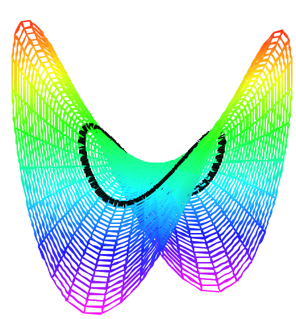

Figura 2

(i) Decida se a curva acima é *plana* ou não, i.e se seu traço está contido num plano de $\mathbb{R}^3$ ou não.

(c) $\alpha(t) = (\cos t \cosh t, \operatorname{sen} t \cosh t, t)$. Neste exemplo desenhe a superfície obtida e desenhe o traço da projeção ortogonal de α no plano horizontal xy. *Sugestão*: Busque uma superfície de revolução obtida girando-se uma curva contida no semi-plano yz $(y > 0)$ em torno do eixo z.

(d) $\alpha(t) = (\cos t \cos(4t), \cos t \ \operatorname{sen}(4t), \operatorname{sen} t)$. *Sugestão*: Busque uma superfície clássica.

(16) Seja C obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e do cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Parametrize C e exiba as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ do centróide de C, em termos de quocientes de integrais definidas numa variável real t.

(17) Seja C_1 o semi-círculo $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ parametrizado de maneira simples com a projeção x da curva crescendo de -1 até 1. Considere o campo $F(x, y) = \left(x^2y^2, -y^2\right)$.

(a) Deduza que F não é conservativo.

(b) Deduza que C_1 pode ser naturalmente parametrizada como gráfico da forma $x \mapsto (x, f(x)), x \in [-1, 1]$, explicitando $f(x)$.

(18) Considere a curva C_3 dada pelo *arco orientado* da parábola $x = (y-1)^2 + 1$, saindo do ponto $(1, 1)$ e chegando ao ponto $(2, 0)$.

(a) Calcule a integral de linha $I = \int\limits_{C_3} (y-1) d\ell$. *Sugestão*: Use

$$\int u\sqrt{u^2+1}\, du = \frac{(u^2+1)^{3/2}}{3} + C. \text{ Resposta:} \tfrac{1}{12} - \tfrac{5\sqrt{5}}{12}.$$

(19) Seja C_1 o arco da parábola $(x, x^2), 0 \leqslant x \leqslant 1$. Seja C_2 o segmento de reta orientado saindo do ponto inicial $(1, 1)$ e chegando ao ponto final $(0, 3)$. Seja C_3 o segmento de reta orientado ligando o ponto inicial $(0, 3)$ ao ponto final $(0, 0)$.

Considere C a justaposição das curvas C_1, C_2 e C_3 (esboce um desenho auxiliar).

(a) Calcule

$$I := \int\limits_C x^3\, dl$$

(b) Seja $a > 0$. Seja $C_a = \{(u, v)\mathbb{R}^2;\ u = ax, v = ay,\ (x, y) \in C\}$. Sem fazer cálculo explícito, determine compr(C_a) em termo do comprimento de C. Também expresse

$$I_a = \int\limits_{C_a} u^3\, dl$$

em termo de I, sem precisar calcular I. Generalize isto para integrais do mesmo tipo mais gerais.

(20) Considere o arco da hélice C parametrizado por $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t \in [0, \pi]$ onde $a > 0, b \neq 0$.
   (a) Encontre duas superfícies S_1 e S_2 de modo que $C = S_1 \cap S_2$. (as superfícies podem ser dadas, ou bem na forma implícita $f(x, y, z) = 0$, ou bem na forma paramétrica $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)$.
   (b) Calcule o comprimento de C e expresse a integral com respeito ao comprimento de arco $\int_C f(x, y, z) d\ell$, onde $f(x, y, z)$ é uma função real dada, na forma de uma integral definida usual na variável t.
   (c) Calcule as coordenadas do centróide de C.