

**LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE TEOREMA DE
GREEN, FLUXO (CONT.), DIVERGÊNCIA E
ROTACIONAL DE UM CAMPO ESPAÇO,
LAPLACIANO, FUNÇÕES HARMÔNICAS (CONT)**

PROFESSOR: RICARDO SÁ EARP

- (1) Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$ campos vetoriais definidos num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Seja $f(x, y, z)$ uma função real suave definida em U . Mostre que $\text{div } F$ e $\text{rot } F$ são "operadores lineares" no espaço vetorial real dos campos vetoriais sobre U . Todavia, mostre que

$$\text{div}(f(x, y, z)F(x, y, z)) = f(x, y, z) \text{div } F(x, y, z) + \nabla f(x, y, z) \cdot F(x, y, z)$$

onde \cdot denota o produto escalar em \mathbb{R}^3

$$\text{rot}(f(x, y, z)F(x, y, z)) = f \text{rot } F(x, y, z) + \nabla f(x, y, z) \times \text{rot } F(x, y, z)$$

onde \times denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3

Mostre também que $\text{rot } \nabla f = 0$ e $\text{div } \text{rot } F = 0$.

- (2) Seja $X(x, y, z) = (x, y, z)$, o campo "vetor posição". Seja $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\alpha > 0$.
- (a) Calcule ∇f , Δf , $\Delta \frac{1}{f}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
- (b) Sejam $F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} X(x, y, z)$ e $G(x, y, z) = k \times F$, onde $k = (0, 0, 1)$. Calcule $\text{div } F$, $\text{rot } F$ e $\text{div } G$.
- (c) Seja $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $h(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Calcule $\nabla h(x, y, z)$ e $\Delta h(x, y, z)$. Encontre todas tais funções g tal que h seja harmônica; i.e $\Delta h(x, y, z) = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Calcule também $\text{rot}(gX)(x, y, z)$.
- (d) A mesma questão do item anterior considerando agora $h(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Daí, tente encontrar todas as funções harmônicas $h(x, y)$ definidas no anel $1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2$ que valem valores constantes $h(1) = a$ e $h(2) = b$ nos círculos de raio 1 e 2, respectivamente, onde a, b são números reais dados.
- (e) Seja $Y(x, y, z) = (a, b, c)$ um campo constante de \mathbb{R}^3 . Calcule $\nabla(Y \cdot X)$, $\text{div}(Y \times X)$, $\text{rot}(Y \times X)$, $\text{div}(fY \times X)$ e $\text{rot}(fY \times X)$.

- (3) Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z) = (G_1(x, y, z), G_2(x, y, z), G_3(x, y, z))$ campos suaves definidos num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, onde $G_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ são funções reais (escalares) definidas em U (componentes de G). Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ funções reais suaves definidas em U . Denotemos por \cdot o produto escalar em \mathbb{R}^3 e denotemos por \times o produto vetorial \mathbb{R}^3 . Vamos introduzir uma simbologia.

$$(F \cdot \nabla)G := (F \cdot \nabla G_1, F \cdot \nabla G_2, F \cdot \nabla G_3), \text{ etc. } \Delta G := (\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3), \text{ etc.}$$

Deduza as seguintes fórmulas:

- $\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \text{rot } G + G \times \text{rot } F$.
 - $\text{div}(F \times G) = (\text{rot } F) \cdot G - F \cdot (\text{rot } G)$.
 - $\text{rot}(F \times G) = (\text{div } G)F - (\text{div } F)G + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$.
 - $\text{rot rot } F = \nabla \text{div } F - \Delta F$.
 - $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
 - $\text{div}(f \nabla g - g \nabla f) = f \Delta g - g \Delta f$.
 - Assuma que G é um campo contante e deduz a fórmula particulares para as identidades acima.
- (4) Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^3 e seja F um campo suave em Ω . Reflita o seguinte:
- A condição $F = \nabla u$ e a relação com a condição de $F(x, y, z)$ ser irrotacional ($\text{rot } F \equiv 0$) em Ω .
 - A condição $F = \text{rot } G$ e a relação com a condição de $F(x, y, z)$ ser incompressível ($\text{div } F \equiv 0$) em Ω .
 - Para um domínio estrelado, as condições de $F(x, y, z)$ ser ao mesmo tempo irrotacional e incompressível, e a relação com as condições de F ser conservativo e a função potencial associada f ser harmônica ($\Delta f \equiv 0$) em Ω .

- (5) (*primeira e segunda identidades de Green*). Seja R uma região cuja fronteira é uma curva simples fechada positivamente orientada $C = \partial R$. Seja n^+ o campo normal unitário exterior (apontando para fora). Seja $F(x, y)$ um campo suave em R . Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais suaves definidas em R .

Sabemos que o fluxo Φ_C de F através de C é dado por (fazendo uma aplicação do teorema de Green):

$$\Phi_C := \int_C F \cdot n^+ dl = \iint_R \text{div } F dA$$

onde $dA = dx dy$ é o elemento de área do plano, e dl é o elemento comprimento de arco de C .

Escolha $F = v \nabla u$, na fórmula acima, use a identidade $\Delta u = \text{div } \nabla u$ e denote

$\frac{\partial u}{\partial n^+} := \nabla u \cdot n^+$, para deduzir a seguinte identidade (*primeira identidade de Green*):

$$\iint_R v \Delta u \, dA + \iint_R \nabla v \cdot \nabla u \, dA = \int_C v \frac{\partial u}{\partial n^+} \, d\ell$$

Troque u por v na fórmula acima e deduza a seguinte identidade (*segunda identidade de Green*):

$$\iint_R (v \Delta u - u \Delta v) \, dA = \int_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n^+} - u \frac{\partial v}{\partial n^+} \right) \, d\ell$$

(a) Conclua que se u é harmônica então $\int_C \frac{\partial u}{\partial n^+} \, d\ell = 0$

(b) Mostre que se u é harmônica então

$$\iint_R |\nabla u|^2 \, dA = \int_C u \frac{\partial u}{\partial n^+} \, d\ell$$

Conclua que uma função harmônica u se anulando em $C = \partial R$ se anula identicamente em u .

Deduza daí que duas funções harmônicas u e v em R que possuem os mesmos valores na fronteira de R são iguais. Isto é, se a restrição de u à C é igual à restrição de v à C , então $u = v$ em toda a região R .

(6) (*propriedade da média para funções harmônicas no plano*).

Vamos supor agora que u é harmônica num domínio (aberto e conexo) Ω . Seja (x_0, y_0) um ponto de Ω e seja $D_r = D_r(x_0, y_0)$ um disco fechado de raio r (possivelmente pequeno) e de centro (x_0, y_0) inteiramente contido em Ω . Tal escolha é possível já que Ω é um aberto do plano. Seja C_r o círculo de raio r que é a fronteira de D_r (positivamente orientada).

Como u é harmônica é subharmônica, i. e. $\Delta u \geq 0$.

Seja Φ_C o fluxo do campo ∇u através de C . Já sabemos que

$$\Phi_C = \int_{C_r} \frac{\partial u}{\partial r} \, d\ell = \iint_{D_r} \Delta u \, dx \, dy$$

Em coordenadas polares, $d\ell = r \, d\theta$ e assim

$$r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \, d\theta = \iint_{D_r} \Delta u \, dx \, dy$$

Como, $\Delta u \geq 0$, integrando o primeiro termo da equação acima com respeito a r , entre 0 e um número fixo R , levando em conta que cada D_r é um disco de raio r centrado em (x_0, y_0) , deduzamos que

$$u(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(R \cos \theta - x_0, R \sin \theta - y_0) R \, d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u \, d\ell$$

Agora, considerando que $-u$ também é uma função sub-harmônica deduzamos que (*propriedade da média de uma função harmônica*):

Se u é harmônica num domínio Ω então $u(x_0, y_0)$ é igual a média do valor de u em qualquer círculo em Ω centrado em (x_0, y_0) , inteiramente contido em Ω , isto é

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u \, d\ell$$

- (7) (*princípio do máximo para funções harmônicas*). Deduza do item anterior o seguinte princípio do máximo: Se u atinge um máximo M num ponto (interior) de Ω então $u \equiv M$ em todo o domínio Ω .

Tal princípio vale também para funções subharmônicas ?

- (8) Este exercício será melhor compreendido quando você tiver conhecimento da teoria da *integração complexa* e do cálculo de integrais complexas usando o *teorema dos resíduos*. Volte a revisitá-lo quando você estiver fazendo o curso de variáveis complexas. Seja $U \subset \mathbb{C}$, onde U aberto do plano complexo \mathbb{C} . Denotamos $w = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ um número complexo, a e b são chamadas de parte real e parte imaginária de w , respectivamente. Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$, onde $z = x + iy \in U$ ($x, y \in \mathbb{R}$) e $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$, uma função complexa contínua definida em U (ou seja $u(z)$ e $v(z)$, a parte real e a parte imaginária de $f(z)$ são funções reais contínuas em U). Seja γ uma curva parametrizada suave cujo traço C está em U .

Definimos a *integração complexa* da seguinte maneira

$$\int_C f(z) \, dz = \int_\gamma f(z) \, dz = \int_\gamma (u \, dx - v \, dy) + i \int_\gamma (v \, dx + u \, dy)$$

na prática: faça $f(z) = u(z) + iv(z)$ e $dz = dx + i \, dy$

e efetue a multiplicação $f(z) \, dz$ separando as partes real e imaginária

Assim, tanto parte real quanto a parte imaginária da *integral complexa* é uma *integral de linha real*. Quando $f(z)$ é holomorfa em U , ou seja tem derivada complexa, ou seja ainda a parte real e imaginária satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, i.e $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ em U , ou ainda $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \equiv 0$ em U então,

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0$$

em todo domínio estrelado U . Quando $f(z)$ tem singularidades isoladas, digamos um número finito de polos na interior

da região cuja fronteira orientada é C , denotados por a_1, \dots, a_n com a propriedade de que $|f(z)| \rightarrow \infty$, se $z \rightarrow a_k$, a situação é controlada pelo teorema dos resíduos como explicado abaixo. Numa vizinhança de cada pólo $a := a_k$, $f(z)$ se escreve como

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{b_1}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (b_m \neq 0)$$

O número complexo b_1 é chamado de resíduo de $f(z)$ em $z = a$ e denotado por $\text{Res}(f, a)$. Quando $m = 1$ diz-se que $f(z)$ tem um pólo simples em $z = a$. O exemplo típico é $f(z) = \frac{1}{z}$. Também desenvolvendo a série de Taylor de e^z e $\cos z$ na origem verifica-se que $f(z) = \frac{e^z}{z}$ e $g(z) = \frac{\cos z}{z}$ são meromorfas em \mathbb{C} , holomorfas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ com um pólo simples na origem, ambas com resíduos iguais a 1 na origem.

O teorema de resíduos diz uma função $f(z)$ holomorfa no interior da região U , exceto num número finito de singularidades, digamos pólos, a_1, \dots, a_n , satisfaz $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_k)$.

Considere agora uma função meromorfa $f(z)$ em \mathbb{C} que têm um único pólo na origem e este pólo é simples e com "resíduo" real. Acima explicitamos alguns exemplos desta situação. Segue daí que quando o resíduo é real, a parte real da diferencial meromorfa $f(z) dz$ é "exata" ou "integrável" (ou seja, o campo associado é conservativo) e assim tem uma primitiva (o campo associado tem um potencial). Enquanto que a parte imaginária de $f(z) dz$, embora seja "localmente exata" (o campo associado tem rotacional zero) não é globalmente exata (o campo associado não é conservativo em todo o plano perfurado, mas é conservativo num domínio estrelado que não contém a origem). Nos exemplos (b), (c) abaixo, tomamos as partes imaginárias na integral complexa.

(a) Particularize a análise precedente, considerando a integral complexa $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, onde γ é uma curva parametrizada simples fechada não passando pela origem, fazendo observações pertinentes, exemplificando. Por exemplo, volte ao último exercício da lista 4 e o analise à luz destes novos fatos. Note o seguinte:

No domínio estrelado $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ com centro em $z = 1$ uma primitiva de $\frac{1}{z}$ está dada por

$\ln(z) = \ln|z| + i\theta(z)$, onde, $z = x + iy$, $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (determinação do logaritmo ou função logaritmo complexo)

$\theta \in (-\pi, \pi)$ está dada por $\theta = \arg z = 2 \arctan\left(\frac{y}{x+r}\right)$. Note que

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

As parte real e imaginária do logaritmo complexo, dadas por $\ln|z|$ e $\theta(z)$, respectivamente, são funções C^∞ e harmônicas em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, como pode ser verificado diretamente. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, seja $[1, z]$ o segmento orientado partindo do centro 1 até z . Pode-se mostrar que $\ln z$ tem a seguinte forma integral complexa $\ln z = \int_{[1,z]} \frac{1}{z} dz$. Em

todo caso vale que $\ln'(z) = \frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Assim,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

para toda curva parametrizada fechada contida num domínio estrelado que não contém a origem. Claro que se γ é uma curva simples fechada positivamente orientada que dá uma volta em torno da origem, tem-se que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

aplicando o teorema dos resíduos. Mais geralmente vale o seguinte fato: Dado um domínio estrelado Ω com centro c e uma função holomorfa $f(z)$ em Ω , tem-se que

$F(z) := \int_{[c,z]} f(z) dz$, é uma primitiva de $f(z)$, i.e

$F'(z) = f(z)$, $z \in \Omega$. Assim,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva parametrizada fechada contida no tal domínio Ω .

- (b) Seja $F(x, y)$ um campo suave definido no plano perfurado na origem por

$$F(x, y) = \left(\frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y), \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \cos y + y \sin y) \right),$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Seja γ uma curva simples fechada positivamente orientada que não passa pela origem. Seja R a região do plano cuja fronteira (orientada) é γ . Calcule o trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$, levando em conta os caso em que a origem $(0, 0)$ pertence ou não pertence ao interior da região R , pelos argumentos acima.

OBS: Aqui a função meromorfa é $f(z) = \frac{e^z}{z}$ e tem resíduo 1 na origem. Logo, o trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que dá uma volta em torno da origem é igual a 2π . O trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que é fronteira de uma região que não contém a origem é igual a zero.

(c) Seja $F(x, y)$ um campo suave definido no plano perfurado na origem por

$$\left(\frac{-y \cos x \cosh y - x \operatorname{sen} x \sinh y}{x^2 + y^2}, \frac{x \cos x \cosh y - y \operatorname{sen} x \sinh y}{x^2 + y^2} \right).$$

OBS: Aqui a função meromorfa é $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ e tem resíduo 1 na origem. Logo, o trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que dá uma volta em torno da origem é igual a 2π . O trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que é fronteira de uma região que não contém a origem é igual a zero.