

**LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE TRABALHO,
CAMPOS CONSERVATIVOS, TEOREMA DE GREEN,
FLUXO DE UM CAMPO AO LONGO DE UMA
CURVA, DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL DE UM
CAMPO NO PLANO, FUNÇÕES HARMÔNICAS**

PROFESSOR: RICARDO SÁ EARP

- (1) Fazer exercícios 1, 4, 5, 7, 8, 9 da seção 8.4.4 pgs 186, 187 do livro texto.
- (2) Fazer exercícios 1), 2), 3), 5)(b), 6), 8) (veja neste exercício a noção de *fluxo de um campo de vetores F através de uma curva fechada C*) da seção 8.5.2, pgs 192, 193,194 do livro texto.
- (3) Fazer exercícios 1), 4) da seção 8.6.3 pgs 198, 199 e 6), 9), 10), 11), 12) da seção 8.7 pgs 198,199, 200 do livro texto.
do livro texto.
- (4) Seja C_1 o semi-círculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ parametrizado de maneira simples com a projeção x da curva crescendo de -1 até 1 . Considere o campo $F(x, y) = (x^2y^2, -y^2)$.
Calcule o trabalho W_1 realizado pelo campo F ao longo de C_1 . Resposta: $W_1 = 4/15$.
Em seguida calcule o trabalho W_2 do mesmo campo F ao longo do semi-círculo orientado de maneira que a projeção x da curva decresça de 1 até -1 .
Finalmente, considere C_2 o segmento de reta orientado de $(1, 0)$ à $(3, 1)$. Seja C a justaposição das curvas parametrizadas C_1 (parametrização inicial) e C_2 . Calcule o trabalho W de F ao longo de C . Resposta: $W = 4/15 + 59/15$.
- (5) Considere a curva C_3 dada pelo *arco orientado* da parábola $x = (y - 1)^2 + 1$, saindo do ponto $(1, 1)$ e chegando ao ponto $(2, 0)$. Calcule o *trabalho* realizado pelo campo $G(x, y) = (x - (y - 1)^2, 2)$, ao longo de C_3 . *Sugestão*: Use uma parametrização, $t \mapsto (x(t), y(t))$, com $y = t$. Resposta: -1 .
- (6) Considere o campo F em \mathbb{R}^2 dado por $F(x, y) = (8 + y^2 - 3x^2, e^y + 2xy + ye^{-2y})$.
Determine se $F(x, y)$ é conservativo ou não.
Encontre *todas* as funções potenciais associadas à F (caso existam); *verificando por um cálculo direto a sua resposta*. Resposta: $f(x, y) = 8x + xy^2 - x^3 + e^y - \frac{ye^{-2y}}{2} - \frac{e^{-2y}}{4} + C, C \in \mathbb{R}$.

Calcule o trabalho W realizado pelo campo F ao longo da curva $t \mapsto \left(2 \cos^7(t/2), 3 \sin^4(t/2)\right)$, quando t varia de $t = 0$ à $t = 2\pi$. Generalize isto para *curvas simples fechadas quaisquer*. Resposta: O trabalho pedido está dado por $W = f(-2, 0) - f(2, 0) = -16$.

- (7) Seja $F(x, y, z) = (xy, z-x, 2yz)$. Seja C uma curva parametrizada, onde C está formado pela justaposição de três segmentos de retas orientados; sendo o primeiro saindo da origem até ao ponto $P := (1, 0, 0)$, o segundo ligando o ponto P ao ponto $Q := (1, 2, 0)$ e o terceiro ligando o ponto Q ao ponto $R = (1, 2, -2)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x, y, z)$ ao longo de C . trabalho. Resposta: 6.

- (8) Seja $F(x, y, z)$ um campo diferenciável e seja $C : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ uma curva parametrizada. Escreva a integral de linha $\int_C F(x, y, z) \cdot T d\ell$, na forma de uma integral de uma variável real t , onde:

C está dada como a interseção das superfícies $z = 4x^2 + 2y^2$ e $z = 12 + x^2 - y^2$, de forma que sua projeção ortogonal está orientada no sentido anti-horário, T é o vetor unitário tangente. Esboce um desenho esquemático de C , respondendo se C é uma curva plana ou não, justificando a sua afirmação. Idem para C obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e do cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

- (9) Deduza que a integral

$$\int_C x(x^2 + y^2)dx + (2x + x^2y + y^3)dy :=$$

$$\int_a^b \left(x(x^2 + y^2)dx/dt + (2x + x^2y + y^3)dy/dt \right) dt$$

onde $C : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ é uma curva plana simples fechada, é proporcional à área da região delimitada por esta curva. Interprete tal integral como trabalho. Encontre outros exemplos semelhantes de campos vetoriais F realizando um trabalho ao longo de curvas fechadas com a mesma propriedade.

- (10) Seja C_1 uma curva parametrizada fechada simples, que é fronteira de um domínio R_1 do plano \mathbb{R}^2 , dada por $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $t \in [0, 1]$, $\alpha(0) = \alpha(1)$.

- (a) Considere o campo

$F(x, y) = (-2y + e^x \cos x, 2x + \ln(1 + y^2))$. Escreva o trabalho $W_{C_1}(F)$ realizado pelo campo F ao longo de C_1 na forma de uma integral definida de uma função real de

uma variável real t . Sendo o integrando dependente de f, f', g, g' .

- (b) Em seguida, usando obrigatoriamente o teorema de Green, calcule o trabalho de F ao longo da elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$, negativamente orientada (orientação horária). Resposta: Resposta: -24π .
- (c) Agora suponha que a área da região R_1 do enunciado seja igual a A_1 e que o centróide de R_1 seja igual a (x_0, y_0, z_0) . Seja $\lambda > 0$, e considere $C_\lambda = \{(u, v); u = \lambda x, v = \lambda y, (x, y) \in C_1\}$. Considere o campo $G(u, v) = (-v^2/2, 0)$. Calcule o trabalho $W = W_{C_\lambda}(G)$ realizado pelo campo G ao longo de C_λ em termo de λ, A e de y_0 . *Sugestão:* Use o teorema de Green. Resposta: $W = \lambda^3 A_1 y_0$.
- (11) Calcule a área da região delimitada pelo laço da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ contido no primeiro quadrante. Resposta: $a^2/2$.
- (12) Calcule a área da região delimitada pelo cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Resposta: $3\pi a^2/2$.
- (13) Seja C uma curva parametrizada suave ligando dois pontos $p = (1, 0, 0)$ (ponto inicial) e $q = (1, 1, 1)$ (ponto final). Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua positiva definida no intervalo $[0, 1]$.
 Calcule $\int_C f\left(\frac{yz}{x}\right) \cdot \frac{-yz dx + zx dy + yx dz}{x^2}$, em termo da área da região "abaixo" do gráfico de f .
- (14) Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x, y) = (y^2, 2xy + x + y^{100})$ ao longo da fronteira da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$, positivamente orientada.
- (15) Seja $f(x, y)$ uma função real suave dada. Considere o campo $F(x, y) = (f(x, y) + yx^3 + e^y, xe^y + xy^3)$ definido numa região simples fechada limitada R com fronteira C .
- (a) Usando o teorema de Green expresse o trabalho realizado ao longo da fronteira orientada C de R em termo da função real $f(x, y)$.
- (b) Assuma agora que R é simétrica com respeito a origem, i. e $(x, y) \in R \iff (-x, -y) \in R$. Assuma também que $f(x, y) = \cos(xy)$. Deduza que o trabalho realizado por F ao longo de C é zero.
- (c) Generalize o item anterior fazendo escolhas de $f(x, y)$ mais gerais.
- (16) Fazendo uma aplicação do teorema de Green num anel topológico, enuncie o correspondente fluxo (total) de um campo ao longo das duas curvas que formam a fronteira do anel topológico e sua relação com a integral da divergência do campo sobre o anel.

- (17) Diga se é verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro escreva uma dedução sucinta mas, correta, justificando as suas afirmações. Além disso, caso a afirmação seja verdadeira exiba um exemplo elucidativo. Caso seja falso, exiba um contra-exemplo. Seja $F(x, y)$ um campo suave no plano perfurado na origem com uma singularidade na origem. Seja C uma curva simples fechada que não passa pela origem.
- Segue então que o trabalho W_C realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que dá uma volta em torno da origem é igual a zero.
 - Se a divergência de $F(x, y)$ é zero, segue então que o fluxo Φ_C de $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que dá uma volta em torno da origem é igual a zero.
 - Se a divergência de $F(x, y)$ é zero, segue então que o fluxo Φ_C de $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada que é fronteira de uma região não contendo a origem, é igual a zero.
 - Se a divergência de $F(x, y)$ é zero, segue então que o fluxo Φ_C de $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada, positivamente orientada C , que dá uma volta em torno da origem, independe da escolha de tal C .
- (18) Seja $\alpha > 0$ um número real positivo. Seja $F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \right)$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Seja C uma curva simples fechada que não passa pela origem.
- Exiba um condição necessária e suficiente sobre α para que o fluxo Φ_C de $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada C que é fronteira de uma região não contendo a origem, seja igual a zero.
 - Exiba uma condição suficiente sobre α para que o fluxo Φ_C de $F(x, y)$ ao longo de uma curva simples fechada, positivamente orientada C , que dá uma volta em torno da origem, seja estritamente positivo. Justifique cuidadosamente a sua afirmação.
 - Exiba um condição necessária e suficiente sobre α para que o campo $F(x, y)$ tenha rotacional nulo. O campo se chama neste caso *irrotacional*.
 - Exiba um condição necessária e suficiente sobre α para que o campo $F(x, y)$ tenha divergência zero. O campo se chama neste caso, *incompreensível* ou *solenoidal*.
 - Exiba um condição necessária e suficiente sobre α para que o campo $F(x, y)$ seja conservativo. Neste caso, exiba uma condição necessária e suficiente sobre α para que a função potencial associada seja harmônica. Lembrete: $h(x, y)$ é harmônica num aberto U se $\Delta h(x, y) := \operatorname{div} \nabla h(x, y) = 0$

em U . Funções harmônicas de duas variáveis reais (x, y) são "localmente" parte real de funções *holomorfas*. Revisite este item futuramente.

- (19) Considere o campo $F(x, y) = \left(\frac{-5y}{x^2 + y^2} + x^2 - y, \frac{5x}{x^2 + y^2} \right)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Calcule o trabalho W_C ao longo do círculo C dado por $x^2 + y^2 = 1/4$, orientado no sentido anti-horário. Resposta: $W_C = 41\pi/4$.

(b) Seja L o segmento de reta orientado ligando a origem $(0, 0)$ (pto inicial) ao ponto $(2, 0)$. Seja J a curva parametrizada $\theta \mapsto \left((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta \right)$; $\theta \in [0, \pi]$.

OBS: Em coordenadas polares J é dada por $r = 1 + \cos \theta, \theta \in [0, \pi]$

Seja $C := L \cup J$ a curva obtida pela justaposição destas duas curvas.

(i) Esboce um desenho da curva C explicitando a orientação e interseções com o eixo y . Encontre os pontos de C no semi-plano aberto superior $y > 0$ cujo vetor velocidade V de C é vertical (i. e a abcissa do vetor velocidade é nula). Marque tais pontos no desenho de C .

(ii) Considere o campo $F(x, y) = (-y, 1 + x + y^8)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo de C .

(c) Agora, considere o cardióide (deslocado) \tilde{C} parametrizado por $\alpha(\theta) = \left((1 + \cos \theta) \cos \theta - 1, (1 + \cos \theta) \sin \theta \right)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(d) Escreva, sem calcular o trabalho $W_{\tilde{C}}$ realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de \tilde{C} , na forma de uma integral definida na variável θ .

(e) Usando obrigatoriamente o teorema de Green, calcule o trabalho $W_{\tilde{C}}$ realizado pelo campo $F(x, y)$ ao longo de \tilde{C} , levando em conta o cálculo da área A da região plana R delimitada pelo cardióide (que você deve ter feito num exercício anterior). Resposta: $W_{\tilde{C}} = 23\pi/2$.

- (20) Você viu nos exemplos da sala de aula que certas integrais definidas difíceis podem ser calculada usando convenientemente o teorema de Green no anel, reduzindo o cálculo a uma integral mais fácil. Neste sentido, justifique as seguintes fórmulas:

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab} \text{ e } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt = \frac{2\pi}{3}$$