PARAMETRIZAÇÕES E INTEGRAL DE SUPERFÍCIES FLUXO DE UM CAMPO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE

PROFESSOR: RICARDO SÁ EARP

(1) Fazer exercícios 1), 2), 3), 4) da seção 9.1.2 pgs 207, 208 e exercícios 1), 2), 6), 7), 9) seção 9.2.5 pgs 213, 214 do livro texto.
(2) Fazer exercícios 3), 4) da seção 10.2.4 pgs 224, 225 e exercícios 1), 2), 3), 4), 8) da seção 10.3.4 pgs 228, 229 do livro texto.

(*Parametrização de superfícies*).

Considere as superfícies parametrizadas abaixo ($a \geqslant b \geqslant c > 0$).

(a) (*elipsóide*) $x = a \operatorname{sen} u \cos v, y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z = c \cos u$
(b) (*Hiperbolóide de duas folhas*) $x = a \operatorname{senh} u \cos v, y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, z = c \cosh u$
(c) (*Cone*) $x = a \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v, y = b \operatorname{senh} u \cosh v, z = c \operatorname{senh} u$
(d) (*Parabolóide elíptico*)
$x = au \cos v, y = bu \operatorname{sen} v, z = u^2$
(e) (*Parabolóide hiperbólico*)
$x = au \cosh v, y = bu \operatorname{senh} v, z = u^2$
(f) (*Helicóide*)
$x = av \cos u, y = av \operatorname{sen} u, z = bu$

(i) Exceto para o helicóide encontre as equações cartesianas das superfícies na forma $F(x, y, z) = 0$, fazendo um desenho qualitativo e geométrico de seus traços (gráficos).
(ii) Identifique as curvas coordenadas u =cst e v =cst dentre as curvas clássicas.
(iii) Determine valores, caso seja possível, a, b, c para que a superfície seja de revolução, identificando o seu eixo.
(iv) Calcule o normal $N = N(u, v)$ e o elemento de área $dA := \|X_u \times X_v\| dudv$. Caso a superfície seja de revolução determine se o normal N está apontando para a região de $\mathbb{R}^3$ que contém o eixo (ou não). No caso do elipsóise determine se o normal N está apontando para dentro ou para fora.
(v) Troque v por $\operatorname{senh} v$ na parametrização acima do helicóide explicando se obtemos uma nova superfície

ou não. Em seguida, quando $a = b$, calcule $X_u \cdot X_u, X_v \cdot X_v, X_v \cdot X_v$, onde $\cdot$ é o produto escalar de $\mathbb{R}^3$.

(vi) Considere $Y : (u, v) \mapsto (-a \cosh v \operatorname{sen} u, -a + a \cosh v \cos u, av)$. Identifique esta superfície com uma translação de uma superfície de revolução, fazendo um desenho. Em seguida, calcule $Y_u \cdot Y_u, Y_v \cdot Y_v, Y_v \cdot Y_v$, comparando com o cálculo acima.

(g) Seja $x = u \cos v, y = u^2/2, z = u \operatorname{sen} v, 0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$. Deduza que a superfície é de revolução fazendo um desenho apurado desta.

(h) Seja C um círculo de raio R com centro O que está a uma distância $a > 0$ de uma eixo L. Gire o círculo em torno de L, obtendo um *toro de revolução* $\mathbb{T}^2$. Exiba uma parametrização deste toro.

(*Integral de superfícies*).

(3) Calcule a área A do toro de revolução $\mathbb{T}^2$, definido no item anterior,de duas maneiras distintas. A primeira usando a definição. A segunda, usando o teorema de Pappus. Resposta: $A = 4\pi^2 ar$.

(4) Usando obrigatoriamente o teorema de Pappus, fazendo uso da área da esfera, calcule as coordenadas do centróide de um semicírculo de raio R.

(5) Considere a função $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \in [1, t]$. Seja S a superfície obtida fazendo uma rotação de f em torno do eixo x. Seja $A(t)$ a área de S e $V(t)$ o volume do sólido delimitado por S e pelas "tampas", que são discos $D(1)$ em $x = 1$ e $D(t)$ em $x = t$.

(a) Parametrize S e parametrize os discos $D(1)$ e $D(t)$.

(b) Determine um intervalo de valores de α de maneira que a área $A(\infty)$ seja infinita, mas o volume $V(\infty)$ seja finito.

(c) Estude o fluxo do campo constante $i = (1, 0, 0)$ ao longo de $S \cup D(1) \cup D(t)$. Compare com o teorema da divergência.

(6) considere o cone truncado
$S_a = \{x^2 + y^2 = a^2 z^2,\ 0 < h < z < H\}$.

(a) Parametrize S e calcule a sua área.

(b) Fazendo $a = 1$, "fechando" $S = S_1$ com as "tampas"(discos) em $z = h$ e $z = H$, obtém-se uma superfície fechada $\widehat{S}$. Calcule o fluxo do campo constante $k = (0, 0, 1)$ ao longo de $\widehat{S}$. Compare com o teorema da divergência.

(7) Seja o campo $F(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x, y, z)$. Seja $a > 0$. Seja $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant a\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Seja $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = z^2;\ 0 \leqslant z \leqslant a\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Seja $S = S_1 \cup S_2$ a superfície fechada orientada pelo normal unitário exterior N.

(a) Calcule a área de S.

(b) Assumindo que $\operatorname{div} F = 0$ calcule o fluxo de F ao longo de S_1.

(c) Assumindo que div $= 1$, calcule o fluxo de F ao longo de S. Compare com o teorema da divergência.

(8) Considere novamente a superfície parametrizada S dada por $x = u\cos v, y = u^2/2, z = u \operatorname{sen} v, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$. Calcule a área A de S, o centróide $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de S, e o momento de inércia relativo ao eixo z definido por $I_z := \int_S (x^2 + y^2) dA$. Resposta: $A = (2\sqrt{2} - 1)/3, \overline{x} = 0, \overline{y} = (5 + 3\sqrt{2})/35, A\overline{z} = \left(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})\right)/4, I_z = (5\sqrt{2} + 2)\pi/42$.

(9) Considere as superfícies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = xy\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1/2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = xy\}$.

(a) Seja $g(x, y, z) = e^{xyz} + \cos z$. Seja

$$I_1 = \iint_{S_1} g(x, y, z)\, dA$$

Coloque I_1 na forma de uma integral iterada, usando coordenadas usuais retangulares x, y. Determine rigorosamente o domínio de integração e explicite o integrando em função das variáveis x, y.

(b) Seja $g(x, y, z) = e^{xyz} + \cos z$. Seja

$$I_2 = \iint_{S_2} g(x, y, z)\, dA$$

Coloque I_2 na forma de uma integral dupla, usando coordenadas polares r, θ. Determine o domínio de integração em termos de r, θ e explicite o integrando em função das variáveis r, θ.

(c) Calcule a área de S_1. Resposta: $\dfrac{2\pi}{3}\left[2^{3/2} - 1\right]$.

(10) Seja S a superfície que é o pedaço do parabolóide elíptico $2x^2 + 3y^2 + z = 1$ que está contido no cilindro sólido $4x^2 + 9y^2 \leqslant 1$.

(a) Calcule a área A de S. Resposta: $A = \pi(5\sqrt{5} - 1)/36$.

(b) Dada $f(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 + z$, calcule $I = \iint_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}A$.

Resposta: $I = \pi(125\sqrt{5} - 19)/720$.