

LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE FLUXOS, TEOREMA DE GAUSS E DE STOKES

- (1) Fazer exercícios 1), 2), 3), 4) da seção 10.4.4 pgs 235, 236 do livro texto.
- (2) Fazer exercícios 1), 2), 3), 5) da seção 10.5.3 pgs 241, 242 e exercs 1), 2), 3), 4) da seção 10.6.3 pgs 245, 246 e exercícios 1), 2), 3), 5), 6), 8), 9), 10), 11), 12) da seção 10.7, pgs 247, 248, 249 do livro texto.
- (3) Fazer exercícios 1), 2), 4) da seção 11.5.3 pgs 263, 264 , 1), 2) da seção 11.6.4 pg 266 e 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7) 8), 9) da seção 11.7 pgs 266, 267, 268 do livro texto.

(Fluxo através de superfícies)

- (4) Seja o campo radial $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule, usando a definição, o fluxo Φ_S de F através da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 1\}$, orientada pelo vetor unitário N de modo que no ponto $(0, 0, -2)$, N é igual a $(0, 0, -1)$ (Note que N não é constante em S !!). Você pode usar o fato que a área de S é igual a 12π . Resposta: $\Phi_S = 24\pi$.
- (5) Seja $F(x, y, z) = \lambda(0, 0, 1)$ o campo constante vertical. Seja S a semi-esfera de raio a contida no semi-plano superior $z \geq 0$. Seja N o campo normal unitário a S apontando para o exterior da esfera. Calcule o fluxo de F através S . Mostre que o fluxo de F é o mesmo calculado através de uma certa região plana, facilmente calculável. Resposta: Fluxo = $\lambda\pi a^2$.

(Teorema de Gauss).

- (6) Considere o campo $F(x, y, z) = (x \frac{2z\sqrt{3-z}}{7-z} + e^{yz}, e^{xz}, e^{xy})$. Considere $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 4, z = 3\}$, orientado pelo normal $N_1 = (0, 0, 1)$. Seja $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 6, z = 1\}$, orientada pelo normal $N_2 = (0, 0, -1)$. E seja $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 7 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq 3\}$, orientada pelo normal unitário N_3 cuja terceira componente é positiva.

Considere a superfície fechada $S := S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientada pelo normal N que é igual a N_1 ao longo de S_1 , igual a N_2 ao longo de S_2 , igual a N_3 ao longo de S_3 .

Usando o teorema de Gauss calcule o fluxo de F através de S .

Resposta: $\frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$.

- (7) Considere o campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e a região do espaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}$. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 1\}$, orientada pelo vetor unitário N de modo que no ponto $(0, 0, -2)$, N é igual a $(0, 0, -1)$ (Note que N não é constante em S !!).
- (a) Calcule o fluxo de F através do disco $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 3, z = 1\}$, orientado pelo campo normal $(0, 0, 1)$. Resposta: $\Phi_D = 3\pi$.
- (b) Calcule o fluxo de F através do cone \mathcal{C} dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 3$.
- (c) Calcule novamente o fluxo Φ_S de F através da superfície S , usando obrigatoriamente o teorema da divergência, *aplicando-o a certa superfície fechada que é união de S com outra*, dada abaixo:
- (i) $S \cup D$, onde D é o disco D acima.
(ii) $S \cup \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} é o cone \mathcal{C} acima.
(iii) Compare os dois métodos tirando uma conclusão.
- Resposta: $\iiint_U \operatorname{div} F dV = 27\pi$.
- (8) Considere um plano π dado por $ax + by + cz = d$ ($a, b, c \neq 0$) e um campo vetorial *constante* $F(x, y, z) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_3 \neq 0$. Seja C uma curva simples fechada contida em π que é a fronteira (bordo) de uma região plana R contida em π com área igual a A . Seja S uma superfície contida num dos semi-espaço delimitado por π com bordo C de maneira que $S \cup R$ é a fronteira de uma região U de \mathbb{R}^3 . Calcule o fluxo de F através S , considerando separadamente os casos em que a superfície está contida no semi-espaço para o qual F aponta, ou está contida no semi-espaço complementar ao semi-espaço para o qual F aponta, ou F está no plano $ax + by + cz = 0$.
- (a) Especialize o exercício anterior quando C é um quadrado com lados de comprimento l .
- (b) Especialize o exercício anterior quando C é uma elipse com eixos de comprimento m e n .
- (c) Especialize o exercício anterior quando S é um cubo com arestas de comprimento l com uma das faces apoiada no plano π sendo removida de S ; além disso, assuma que uma das arestas tem vetor diretor $(-b, a, 0)$. *Faça independentemente* um cálculo direto do fluxo de F através de S calculando os fluxos de F através de *todas* as faces do cubo.
- (d) Discuta a generalização do exercício quando $F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$, onde f, g, h são funções reais.
- (9) Seja S a superfície definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1/2, z = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}\}$. Assuma que S está orientada pelo normal *unitário* N determinado de maneira que N aponta para cima, i.e $N \cdot (0, 0, 1) > 0$

Considere o campo $F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$.

Nesta questão, sugere-se que você esboce um desenho auxiliar

- (a) Sejam b, c números reais positivos. Seja $D = D(b, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq b^2, z = c\}$, o disco de raio $r = b$ no plano $z = c$ centrado no eixo z , com normal *unitário* apontando N_D para cima, i.e $N_D \cdot (0, 0, 1) > 0$. Determine uma parametrização de $D(b, c)$, explicitando o domínio. Em seguida, calcule o fluxo Φ_D de F através de $D(b, c)$, em termos de b e de c . Resposta: $\pi b^4/4 + cb^2\pi$.

- (b) Sem fazer cálculos, estabeleça uma fórmula, fazendo uso do teorema de Gauss ou da divergência, para calcular o fluxo Φ_S de F através de S . Explique corretamente as quantidades e orientações das superfícies envolvidas na fórmula, fazendo inclusive um desenho esquemático.

Sugestão: Note que S é parte da superfície de revolução em torno do eixo z gerada por $z = 1 - y^{1/2}$, $0 < y \leq 1$.

- (c) (*leia bem o enunciado*) Considere o sólido $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)^{1/2} \leq (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1/2\}$. Levando em conta que o volume de U é igual a $\frac{\pi}{5}(1 - 1/2^5)$, usando o teorema de Gauss, calcule o fluxo Φ_S de F através de S . Resposta: $\Phi_S = \frac{3\pi}{5}(1 - 1/2^5) - \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{1024} + \frac{\pi}{4}$.

Sugestão: Use os itens (a) e (b).

- (d) Para $c \in (0, 1)$, considere $S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq c, z = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}\}$. Assuma que S_c está orientada pelo normal *unitário* N determinado de maneira que N aponta para cima. Calcule o fluxo Φ_{S_c} de F através de S_c . Em seguida, calcule $\lim_{c \rightarrow 1} \Phi_{S_c}$, tirando algum significado geométrico

disto. Resposta: $\Phi_{S_c} = \frac{3\pi}{5}(1 - (1 - c)^5) - \pi c(1 - c)^4 - \frac{\pi}{4}(1 - c)^8 + \frac{\pi}{4}$.

- (10) Seja S uma superfície fechada delimitando uma região U do espaço com volume V . Encontre um campo vetorial $F = (P, Q, R)$ de maneira que o fluxo de F através S é exatamente o volume de U .

(*Teorema de Stokes*).

- (11) Calcule a *circulação* do campo vetorial $f(x, y, z) = (3z, 5x, -2y)$ ao longo da curva C obtida interceptando o cilindro vertical $x^2 + y^2 = 1$ pelo plano $z - y - 3 = 0$, sendo C orientada positivamente quando vista de cima. Resposta: 2π .

Generalize este exemplo em seguida a sua solução, obtendo outros campos e outros planos satisfazendo $\text{rot} F \cdot N = \text{cst}$, onde N é um normal unitário ao plano (o cilindro está fixado).

- (12) Seja S o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Seja $F(x, y, z) = (e^{4x^2+y^2}, 3 \ln(1+x^2+y^2+z^2), x^{999}yz)$. Seja N normal unitário a S . Calcule $\iint_S (\text{rot} F) \cdot N dA$. Resposta: 0.

- (13) (Miscelânea)

Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (0, 0, 4 - z)$ e seja a superfície $S = \{(x, y, z), z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, com vetor unitário N apontando para cima.

- (a) Exiba uma parametrização da superfície S , explicitando o seu domínio. Calcule o vetor normal unitário N .
- (b) Calcule o fluxo de F através de S —sem usar o teorema de Gauss. Resposta: 8π .
- (c) Agora considere o disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$, com vetor unitário N_D apontando para cima. Calcule o fluxo de F através de D . Resposta: 16π .

Considere a mesma superfície S e o mesmo campo F dados na questão anterior.

- (a) Use *obrigatoriamente* o teorema de Gauss para calcular o fluxo de F através de S . Resposta: 8π .
- (b) Exiba uma superfície \hat{S} que seja uma porção de um plano π de modo que o fluxo de F através de \hat{S} seja zero.

Considere o campo $G(x, y) = (-y, x)$. Seja R uma região do plano delimitada por uma curva C positivamente orientada. Seja T o vetor velocidade unitário.

- (a) Usando o teorema de Green deduza que a circulação (trabalho) é dada por $\int_C G \cdot T dl = b \cdot \text{área}(R)$, determinando b . Resposta: $b = 2$.
- (b) Considere C a justaposição do cicloide $t \mapsto (2\pi - t + \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ com o intervalo $\{0 \leq x \leq 2\pi, y = 0\}$. Usando o resultado do item anterior, calcule a área A da região delimitada por C . Resposta: $A = 3\pi$.

Considere o campo $F(x, y, z) = (0, \frac{x}{2}, 2z)$.

Considere $S = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (a) Calcule o rotacional de $F(x, y, z)$, denotado por $\nabla \times F$. Determine uma parametrização de S , explicitando o domínio da parametrização e determinando o normal unitário \tilde{N} .

OBS: O normal ao longo da superfície não é um campo constante !!

- (b) Seja N o normal unitário ao longo de S de maneira que no ponto $(0, 0, 0)$, $N = (0, 0, -1)$. Calcule a integral $\iint_S \nabla \times F \cdot N \, dA$ (fluxo do rotacional)—sem usar o teorema de Stokes e sem usar o teorema de Gauss. Resposta: $-\pi/2$.

Considere a mesma superfície S , mesmo normal unitário N e o mesmo campo F dados na questão anterior.

- (a) Calcule a integral $\iint_S \nabla \times F \cdot N \, dA$ —usando obrigatoriamente o teorema de Stokes.
- (b) Calcule a integral $\iint_S \nabla \times F \cdot N \, dA$ —usando obrigatoriamente o teorema de Gauss.