EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- AGOSTO de 2003–Lista 1

Professor: Ricardo Sá Earp

Primeiras Noções

1) Defina os conceitos de *integral completa*, *envelopes*, *integral singular* e *integral geral* para uma E.D.P não linear de primera ordem em n variáveis independentes da forma

$$f(x, u, Du) = 0$$

Mostre como construir novas soluções a partir dos envelopes, dando exemplos. Além disso, escreva a forma geral de uma E. D. P. *linear*, *semilinear* e *quasilinear* em n variáveis independentes.

2) Considere que uma superfície $\mathcal{S}$ em $\mathbb{R}^3$ está dada implicitamente pela equação

$$F(u, v) = 0$$

onde F é de classe C^1 e $u = u(x, y, z)$ e $v = (x, y, z)$ são funções dadas de classe C^1 definidas em um aberto de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine uma condição suficiente para que $\mathcal{S}$ seja *localmente* dada como um gráfico de uma função $z = g(x, y)$, para (x, y) variando num aberto U de $\mathbb{R}^2$.

b) No aberto de $\mathcal{S}$ obtido no item a) mostre que $z = z(x, y)$, satisfaz a E.D.P.

$$p\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q\frac{\partial(u, v)}{\partial(z.x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

c) Classifique a E.D.P. acima e exiba um exemplo concreto desta situação.

3) Seja $v = v(x, y)$ uma função de classe C^1 definidas num aberto de $\mathbb{R}^2$. Assuma que $u = u(x, y)$ é função de v (não envolvendo explicitamente x, y), ou seja

$$u = H(v)$$

onde H é uma função de classe C^1 de uma variável definida num intervalo I da reta. Mostre que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

Classifique a equação que u satisfaz.

4) Esta é uma recíproca do item 3). Sejam $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ duas funções de classe C^1 definidas num aberto U de $\mathbb{R}^2$. Assuma que

$$\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$$

Assuma ainda que u, v satisfazem

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

Mostre que existe uma relação

$$F(u, v) = 0$$

não envolvendo x, y explicitamente, com F de classe C^1 e $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$.

5) Seja $z = z(x, y)$ uma função de classe C^1 definida num certo aberto U de $\mathbb{R}^2$. Seja $F(u, v)$ uma função de classe C^1 definida num aberto de $\mathbb{R}^2$. Descubra a E. D. P. satisfeita pela função $z = z(x, y)$, definida pela relação
   a) $F(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}) = 0$.
   b) $F(x^2 - y^2, z^2 - y^2) = 0$.

6) Elimine os parâmetros a e b e verifique a E. D. P. satisfeita pelas funções abaixo
   a) $z = ax + by + a^2 + b^2$.
   b) $z = ax + \frac{y}{a} + b$.

7)
   a) Mostre que $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1$ é uma integral completa de uma certa E.D.P. não-linear. Tome funções particulares $b = h(a)$ e encontre soluções particulares da mesma equação. Encontre integrais singulares da equação.
   b) Mostre que a E.D.P. do item 6)b) não possui integrais singulares, mas encontre soluções particulares fazendo $b = h(a)$.
   c) Mostre que a E.D.P.

$$px + qy - q^2 = 0$$

possui uma integral completa que é uma família de quádricas em $\mathbb{R}^3$.

8) Considere a equação da superfície mínima

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0$$

a) Fazendo separação de variáveis $z = g(x) + h(y)$ mostre que existe uma solução da equação acima e obtenha a superfície de Scherk dada por

$$z = \frac{1}{a}\log\left(\frac{\cos ax}{\cos ay}\right)$$

Desenhe o gráfico de Scherk, realçando sua geometria.

b) Classifique todas as superfícies mínimas de revolução, chamadas de catenóides, mostrando que a curva geratriz é uma catenária. Desenhe a família dos catenóides realçando sua geometria.

c) Sejam $u = u(x,y), v = v(x,y)$ soluções da equação da superfície mínima num domínio Ω.

Considere a 1-forma

$$\theta = (u-v)\left(\left(\frac{p_1}{W_1} - \frac{p_2}{W_2}\right)\mathrm{d}y - \left(\frac{q_1}{W_1} - \frac{q_2}{W_2}\right)\mathrm{d}x\right)$$

onde, $p_1 = u_x, q_1 = u_y, p_2 = v_x, q_2 = v_y, W_i = \sqrt{1+p_i^2+q_i^2}, i = 1,2.$

i) Mostre que

$$d\theta = \left(((p_1-p_2)\left(\frac{p_1}{W_1} - \frac{p_2}{W_2}\right) + (q_1-q_2)\left(\frac{q_1}{W_1} - \frac{q_2}{W_2}\right)\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

ii) Mostre que $d\theta \geqslant 0$ e $d\theta = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$, e $q_1 = q_2$.

9) Considere o modelo do semi-espaço superior do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), \quad x_{n+1} > 0\}$, dotado da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{x_{n+1}^2}\left(\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_{n+1}\right)$. Segue que a equação do gráfico mínimo vertical satisfeita para uma função $x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)$, está dada por

$$(*) \qquad \mathrm{div}\left(\frac{\nabla \mathrm{u}}{\mathrm{W(u)}}\right) = -\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{uW(u)}}$$

onde $W(u) = \sqrt{1+|\nabla u|^2}$.

a) Classifique a equação $(*)$.
b) Encontre soluções de $(*)$.

10) Seja $\mathcal{F}$ uma faixa no plano $\mathbb{R}^2$. Será que existe uma uma função harmônica u não trivial, i.e $\triangle u = 0$ com $u \not\equiv 0$, valendo zero no bordo da faixa ? E num disco ?

11) Considere a E.D.P. de primeira ordem

$$pq = xy$$

a) Analise se a família
$$(z-b)^2 = y^2(x^2 - a^2)$$
consiste de uma integral completa da equação ou não.
b) Ache uma superfície integral que seja um parabolóide. Idem para uma sela.
c) Mostre que a superfície parametrizada

$$x = s\cosh t, y = \sinh t, z = s\cosh^2 t$$

produz uma solução da equação, explicitando-a na forma $z = z(x,y)$. Verifique se tal superfície integral contém uma reta.

12) Considere a equação diferencial parcial

$$2xz + q^2 = x^2p + xyq$$

a) Classifique o tipo de equação.
b) Determine uma integral completa da equação.
c) Agora, independentemente, assuma que

$$(**) \qquad z + a^2x = axy + by^2$$

seja uma integral completa de $(*)$. Dados h, k, considere a curva $\mathcal{C}$ dada por
$$x_0 = s, \quad y_0 = -hs, \quad z_0 = ks^2, \qquad (s = \text{parâmetro})$$
Mostre que existe uma subfamília de $(**)$ que "toca" (tangência) $\mathcal{C}$ em algum ponto. Obtenha o envelope desta família e mostre que você obtém uma nova família completa que contém a curva $\mathcal{C}$.

BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations*. Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.
2. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. AMS, 1998
3. Murray H. Protter & Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall, 1967.