

# EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- AGOSTO de 2003–Lista 2

Professor: Ricardo Sá Earp

Integrais primeiras e EDP's lineares homogêneas de primeira ordem

Sistemas característicos da forma

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)}$$

- 1) Resolva os sistemas diferenciais propostos. Obtenha a curva-*trajetória geométrica* como interseção de duas superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que se cortam transversalmente, via o cálculo das *integrais primeiras*, no caso de duas variáveis independentes, ou três hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  no caso de três variáveis independentes.

a)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

b)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

c)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

d)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} = \frac{-du}{xyz}$$

- e) Neste exercício, encontre uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  que seja um gráfico de uma função  $z = z(x, y)$  satisfazendo a condição de fronteira  $z = f(y)$  na reta  $\{x = 0\}$  e que contenha a curva dada por

$$dx = \frac{dy}{x^2} = -\frac{dz}{y}$$

f)

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{-dy}{y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$$

g) Resolva o item e) acima pela técnica ensinada em sala de aula e pelo *método das características* que consiste em resolver o sistema de E. D. O. característico associado à E. D. P.

$$p + x^2q = -yz$$

h) Resolva as EDP's

$$\frac{\partial u}{\partial x}P(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial y}Q(x, y, x) + \frac{\partial u}{\partial z}R(x, y, z) = 0$$

determinadas pelos sistemas característicos associados que estão dados nos itens a)–d).

2) Encontre uma solução da equação

$$z_t + zz_x = 0$$

Que seja ilimitada numa vizinhança de um ponto  $a > 0$ .

3) Integre as EDP's dadas abaixo

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^3 + 3xy^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(y^3 + 3x^2y) + \frac{\partial u}{\partial z}2(x^2 + y^2)z = 0$$

b)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(y^n - z^n) + \frac{\partial u}{\partial y}(z^n - x^n) + \frac{\partial u}{\partial z}(x^n - y^n) = 0$$

c)

$$\frac{\partial u}{\partial x}x(cz - by) + \frac{\partial u}{\partial y}y(ax - cz) + \frac{\partial u}{\partial z}z(by - ax) = 0$$

4) Mostre que as soluções do sistema diferencial abaixo são curvas planas

a)

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - xz} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

b)

$$\frac{dx}{-2y - 2z + 4} = \frac{dy}{-x - y + z + 7} = \frac{dz}{-2x + 2y + 2}$$

c)

$$\frac{dx}{y(x+y)+z} = \frac{dy}{x(x+y)-z} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

5) Transforme os sistemas abaixo num sistema da forma

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a(x^2 + y^2)}{y(a^2 + z^2)}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-y}{x}$$

6) Resolva os sistemas lineares abaixo e integre as EDP's lineares homogêneas cujos sistemas característicos associados são exatamente os sistemas dados.

a)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z - 4 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - z + 1 \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y + z + 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z + 2 \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + z + 1 \\ \frac{dz}{dt} = x + y + 2z \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \\ \frac{dz}{dt} = -2z \end{cases}$$

- 7) Neste item vamos tratar de integrais primeiras para equações diferenciais de segunda ordem que aparecem em vários problemas da Geometria Diferencial e da Mecânica. Considere o sistema diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i \left( x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Sabe-se que a tal sistema pode-se associar um sistema de primeira ordem com  $2n$  equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x'_i \\ \frac{dx'_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \end{cases} \quad (**)$$

Dizemos que  $\psi(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$  é uma *integral primeira* do sistema  $(*)$ \* se

$$\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} = 0$$

Ou seja,  $\psi(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$  é constante ao longo das trajetórias das soluções da equação.

Alguma vezes a equação  $(*)$  é não autônoma, ou seja na expressão aparece a variável dependente  $t$ . A definição da integral primeira permanece a mesma (veja exemplos abaixo).

- a) Considere uma equação diferencial de segunda ordem na variável independente  $t$  da forma

$$(*) \quad f(t, x', x'') = 0$$

não envolvendo a variável dependente  $x$ , onde  $f$  é uma função diferenciável com continuidade. Note que a mudança  $p = x'$  transforma a equação dada numa equação de primeira ordem em  $p$ .

- i) Suponha que uma integral primeira pode ser obtida da forma

$$p = F(t, c)$$

envolvendo uma constante arbitrária  $c$ . Integre a equação.

ii) Assuma quem aparece naturalmente uma expressão do tipo

$$t = G(p, d)$$

envolvendo uma constante  $d$ . Integre a equação.

iii) Obtenha uma integral primeira para as equações abaixo

$$t^2 x'' = x'^2 - 2tx' + 2t^2$$

$$2t^2 x' x'' - tx'' + x' = 0$$

b) Assuma que na equação diferencial de segunda ordem

$$(*) \quad f(x, x', x'') = 0$$

não apareça a variável independente. Transforme a equação numa nova equação de primeira ordem onde  $x$  surge como variável independente. Estabeleça uma condição suficiente para a existência de uma integral primeira de (\*).

i) Assuma que a equação obtida no procedimento acima seja dada por

$$1 + \left( \frac{1 - p^2}{1 - x^2} \right)^{-1/2} \frac{dp}{dx} = 0$$

Integre a equação identificando geometricamente as trajetórias no plano de fase  $xp$ .

c) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$y''(x) + P(x, y(x))y'(x) + Q(x, y(x))y'(x)^2 = 0$$

Assuma que a forma diferencial  $\theta = P dx + Q dy$  seja exata. Encontre uma integral primeira para a equação (\*). Integre diretamente a equação quando  $P, Q$  não dependem de  $y$  (equação de Bernoulli).

d) Integre

$$yy'' = -\alpha(1 + y'^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e) Considere o campo unidimensional

$$(*) \quad x'' = F(x)$$

onde  $F$  é uma função de classe  $C^2$ , interpretando-a como a *força* agindo num sistema conservativo.

- i) Mostre que a energia total  $E := T + U$ , onde  $T$  é a energia cinética e  $U$  é a energia potencial é uma integral primeira.
- ii) Mostre que os pontos de equilíbrio do sistema de primeira ordem  $2 \times 2$ ,  $(x, v)$  associado à (\*) corta a reta  $v = 0$ . Mostre ainda que as órbitas periódicas do sistema associado também corta o eixo  $x$  e são simétricas com respeito a este.
- iii) Seja  $x = x_0$  um ponto crítico isolado do sistema associado que seja um máximo local para a energia potencial  $U$ . Determine a natureza do ponto crítico.

Nota: Uma análise da integral primeira revela que num ponto crítico isolado  $(x_0, 0)$  correspondendo a um mínimo local da energia potencial  $U$  tem-se um centro.

- f) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$xyy'' + x(y')^2 + yy' = 0$$

Procure uma integral primeira da forma

$$\psi(x, y, p) = h(x, y) + \int xu \, dp$$

e integre a equação.

- g) Considere a equação diferencial com condição inicial

$$\begin{cases} (x-t) \frac{d^2 x}{dt^2} + e^t \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 1 \right) = 0 \\ x(t_0) = x_0 > t_0 \\ x'(t_0) = p_0, \quad p_0 > 0 \end{cases}$$

Encontre uma integral primeira  $\psi$  da equação.

- h) Considere  $M^2$  uma superfície Riemanniana com métrica  $ds^2 = g(y)^2 dx^2 + dy^2$ . Seja  $(x(s), y(s))$ ,  $s \in (a, b)$  uma curva parametrizada por comprimento de arco. Seja  $\alpha$  o ângulo que o vetor unitário tangente faz com  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Sabe-se que a curvatura geodésica  $k_g$  é dada pela fórmula seguinte:

$$k_g(s) = \frac{d\alpha}{ds} + g'(y) \frac{dx}{ds}$$

- i) Mostre que  $g(y) \cdot \sin \alpha = \text{cst}$ , é uma integral primeira da equação das geodésicas ( $k_g \equiv 0$ ).

Nota: Quando se quer classificar as superfícies de revolução de curvatura média constante num espaço de formas espaciais ( $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n$ ), obtém-se uma equação de segunda ordem satisfeita pela curva geratriz  $\gamma$ . Esta possui uma integral primeira natural que pode ser integrada levando a uma forma explícita útil. Além disso a integral primeira serve para se estudar propriedades geométricas de tais superfícies. Mais precisamente, considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\sin \varphi \\ \frac{dt}{ds} = \cos \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} = 2H - \frac{\cos \varphi}{x} \end{cases}$$

onde  $H$  é uma constante.

- ii) Interprete o sistema acima à luz da Geometria Diferencial das superfícies de  $\mathbb{R}^3$ .
- iii) Usando as técnicas desenvolvidas, mostre que uma integral primeira é dada por

$$f(x, \varphi) = -x \cos \varphi + H x^2$$

verificando o seu resultado por diferenciação direta.

- 8) Integre

$$\frac{dx}{xy^2 + xz} = \frac{dy}{y^3 - yz} = \frac{dF}{2xy^3 + 4y^2F}$$

encontrando uma função  $F(x, y)$  satisfazendo às equações.

*Sugestão:* Considere a mudança de variável  $u = xy$ , e tente transformar o sistema acima numa E.D.O na variável  $u$ , procurando uma solução da forma  $F(x, y) = f(xy)$  onde  $f$  é uma função de uma variável real na variável  $u$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations*. Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.
2. Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
3. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. AMS, 1998
4. Edward Lindsay Ince & Ian Naismith Sneddon. *The solutions of ordinary differential equations*. Longman, 1987.
4. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1991.
5. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, 1979.
6. Wolfgang Walter. *Ordinary differential equations*. Readings in mathematics, Springer, 1998.
7. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles*. J. Gabay, 1989.
8. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations*. Segunda edição, Academic Press, 1992.