EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- AGOSTO de 2003–Lista 2

Professor: Ricardo Sá Earp

Integrais primeiras e EDP's lineares homogêneas de primeira ordem

Sistemas característicos da forma

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1,\ldots,x_n)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}$$

1) Resolva os sistemas diferenciais propostos. Obtenha a curva-*trajetória geométrica*-como interseção de duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ que se cortam transversalmente, via o cálculo das *integrais primeiras*, no caso de duas variáveis independentes, ou três hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$ no caso de três variáveis independentes.

a)

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z}$$

d)

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{xz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy} = \frac{-\,\mathrm{d}u}{xyz}$$

e) Neste exercício, encontre uma superfície de $\mathbb{R}^3$ que seja um gráfico de uma função $z = z(x,y)$ satisfazendo a condição de fronteira $z = f(y)$ na reta $\{x = 0\}$ e que contenha a curva dada por

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}z}{y}$$

f)
$$\frac{\mathrm{d}x}{x(x+y)} = \frac{-\,\mathrm{d}y}{y(x+y)} = \frac{\mathrm{d}z}{(x-y)(2x+2y+z)}$$

g) Resolva o item e) acima pela técnica ensinada em sala de aula e pelo *método das características* que consiste em resolver o sistema de E. D. O. característico associado à E. D. P.

$$p + x^2 q = -yz$$

h) Resolva as EDP's

$$\frac{\partial u}{\partial x}P(x,y,z) + \frac{\partial u}{\partial y}Q(x,y,x) + \frac{\partial u}{\partial z}R(x,y,z) = 0$$

determinadas pelos sistemas característicos associados que estão dados nos itens a)–d).

2) Encontre uma solução da equação

$$z_t + z z_x = 0$$

Que seja ilimitada numa vizinhaną de um ponto $a > 0$.

3) Integre as EDP's dadas abaixo

a)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^3+3xy^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(y^3+3x^2y) + \frac{\partial u}{\partial z}2(x^2+y^2)z = 0$$

b)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(y^n-z^n) + \frac{\partial u}{\partial y}(z^n-x^n) + \frac{\partial u}{\partial z}(x^n-y^n) = 0$$

c)
$$\frac{\partial u}{\partial x}x(cz-by) + \frac{\partial u}{\partial y}y(ax-cz) + \frac{\partial u}{\partial z}z(by-ax) = 0$$

4) Mostre que as soluções do sistema diferencial abaixo são curvas planas

a)
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2-yz} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2-xz} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2-xy}$$

b)
$$\frac{\mathrm{d}x}{-2y-2z+4} = \frac{\mathrm{d}y}{-x-y+z+7} = \frac{\mathrm{d}z}{-2x+2y+2}$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}x}{y(x+y)+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x(x+y)-z} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x+y)}$$

5) Transforme os sistemas abaixo num sistema da forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,x)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}$$

a)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{y}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{a(x^2+y^2)}{y(a^2+z^2)}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+z}{x}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z-y}{x}$$

6) Resolva os sistemas lineares abaixo e integre as EDP's lineares homogêneas cujos sistemas característicos associados são exatamente os sistemas dados.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =x-y+z-4 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} =2x+y-z+1 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} =-2x+y+z+1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =2x+y+z+2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} =x+2y+z+1 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} =x+y+2z \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x+y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -2z \end{cases}$$

7) Neste item vamos tratar de integrais primeiras para equações diferenciais de segunda ordem que aparecem em vários problemas da Geometria Diferencial e da Mecânica. Considere o sistema diferencial de segunda ordem

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = f_i\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right), \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Sabe-se que a tal sistema pode-se associar um sistema de primeira ordem com $2n$ equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = x_i' \\ \dfrac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}t} = f_i\left(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'\right) \end{cases} \qquad (**)$$

Dizemos que $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$ é uma *integral primeira* do sistema $(*)*$ se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = 0$$

Ou seja, $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$ é constante ao longo das trajetórias das soluções da equação.

Alguma vezes a equação $(*)$ é não autônoma, ou seja na expressão aparece a variável dependente t. A definição da integral primeira permanece a mesma (veja exemplos abaixo).

a) Considere uma equação diferencial de segunda ordem na variável independente t da forma

$$(*) \qquad f(t, x', x'') = 0$$

não envolvendo a variável dependente x, onde f é uma função diferenciável com continuidade. Note que a mudança $p = x'$ transforma a equação dada numa equação de primeira ordem em p.

i) Suponha que uma integral primeira pode ser obtida da forma

$$p = F(t, c)$$

envolvendo uma constante arbitrária c. Integre a equação.

ii) Assuma quem aparece naturalmente uma expressão do tipo

$$t = G(p, d)$$

envolvendo uma constante d. Integre a equação.

iii) Obtenha uma integral primeira para as equações abaixo

$$t^2 x'' = {x'}^2 - 2tx' + 2t^2$$
$$2t^2 x' x'' - tx'' + x' = 0$$

b) Assuma que na equação diferencial de segunda ordem

$$(*) \qquad f(x, x', x'') = 0$$

não apareça a variável independente. Transforme a equação numa nova equação de primeira ordem onde x surge como variável independente. Estabeleça uma condição suficiente para a existência de uma integral primeira de $(*)$.

i) Assuma que a equação obtida no procedimento acima seja dada por

$$1 + \left(\frac{1-p^2}{1-x^2}\right)^{-1/2} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

Integre a equação identificando geometricamente as trajetórias no plano de fase xp.

c) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$y''(x) + P(x, y(x))y'(x) + Q(x, y(x)){y'(x)}^2 = 0$$

Assuma que a forma diferencial $\theta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ seja exata. Encontre uma integral primeira para a equação $(*)$. Integre diretamente a equação quando P, Q não dependem de y (equação de Bernoulli).

d) Integre

$$yy'' = -\alpha(1 + {y'}^2), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e) Considere o campo unidimensional

$$(*) \qquad x'' = F(x)$$

onde F é uma função de classe C^2, interpretando-a como a *força* agindo num sistema conservativo.

i) Mostre que a energia total $E := T + U$, onde T é a energia cinética e U é a energia potencial é uma integral primeira.
ii) Mostre que os pontos de equilıbrio do sistema de primeira ordem 2×2, (x, v) associado à $(*)$ corta a reta $v = 0$. Mostre ainda que as órbitas periódicas do sistema associado também corta o eixo x e são simétricas com respeito a este.
iii) Seja $x = x_0$ um ponto crítico isolado do sistema associado que seja um máximo local para a energia potencial U. Determine a natureza do ponto crítico.

Nota: Uma análise da integral primeira revela que num ponto crítico isolado $(x_0, 0)$ correspondendo a um mínimo local da energia potencial U tem-se um centro.

f) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$xyy'' + x(y')^2 + yy' = 0$$

Procure uma integral primeira da forma

$$\psi(x, y, p) = h(x, y) + \int xu \,\mathrm{d}p$$

e integre a equação.

g) Considere a equação diferencial com condição inicial

$$\begin{cases} (x-t)\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^t\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 1\right) = 0 \\ x(t_0) = x_0 > t_0 \\ x'(t_0) = p_0, \quad p_0 > 0 \end{cases}$$

Encontre uma integral primeira ψ da equação.

h) Considere M^2 uma superfície Riemanniana com métrica $\mathrm{d}s^2 = g(y)^2\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Seja $(x(s), y(s))$, $s \in (a, b)$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Seja α o ângulo que o vetor unitário tangente faz com $\dfrac{\partial}{\partial y}$. Sabe-se que a curvatura geodésica k_g é dada pela fórmula seguinte:

$$k_g(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + g'(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

i) Mostre que $g(y) \cdot \sin\alpha = \text{cst}$, é uma integral primeira da equação das geodésicas ($k_g \equiv 0$).

Nota: Quando se quer classificar as superfícies de revolução de curvatura média constante num espaço de formas espaciais ($\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n$), obtém-se uma equação de segunda ordem satisfeita pela curva geratriz γ. Esta possui uma integral primeira natural que pode ser integrada levando a uma forma explícita útil. Além disso a integral primeira serve para se estudar propriedades geométricas de tais superfícies. Mais precisamente, considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\sin\varphi \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 2H - \dfrac{\cos\varphi}{x} \end{cases}$$

onde H é uma constante.

ii) Interprete o sistema acima à luz da Geometria Diferencial das superfícies de $\mathbb{R}^3$.

iii) Usando as técnicas desenvolvidas, mostre que uma integral primeira é dada por

$$f(x, \varphi) = -x\cos\varphi + H\,x^2$$

verificando o seu resultado por diferenciação direta.

8) Integre
$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2 + xz} = \frac{\mathrm{d}y}{y^3 - yz} = \frac{\mathrm{d}F}{2xy^3 + 4y^2F}$$
encontrando uma função $F(x, y)$ satisfazendo às equações.

Sugestão: Considere a mudança de variável $u = xy$, e tente transformar o sistema acima numa E.D.O na variável u, procurando uma solução da forma $F(x, y) = f(xy)$ onde f é uma função de uma variável real na variável u.

BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

2. Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel.* Hermann, Paris,1967.

3. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998

4. Edward Lindsay Ince & Ian Naismith Sneddon. *The solutions of ordinary differential equations.* Longman, 1987.

4. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.

5. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, 1979.

6. Wolfgang Walter. Ordinary differential equations. Readings in mathematics, Springer, 1998.

7. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles.* J. Gabay, 1989.

8. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academis Press, 1992.