EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- AGOSTO de 2003–Lista 3

Professor: Ricardo Sá Earp

Equações quasilineares de primeira ordem:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1,\dots,x_n,u)$$

1) Encontre a solução geral das equações quasilineares em duas variáveis independentes abaixo esboçando algumas superfícies integrais, usando o MAPLE.
   a) $yzp + xzq = xy$
   b) $x^2p + y^2q = (x+y)z$.
   c) $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$.
   d) Diferenciando, verifique que suas respostas dos itens $a) - -c)$ estão corretas.
2) integre a equação diferencial partial

$$y(x-z)p - (1+y^2)q + z - x = 0$$

3) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x \end{cases}$$

Em seguida integre a equação

$$yp + zq = x$$

Usando o MAPLE exiba o gráfico de algumas superfícies integrais.

4) Considere a E.D.P. quasilinear em duas variáveis independentes

$$(*) \qquad p + x^2q = -yz$$

a) Dada uma $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, encontre uma solução explícita de $z = F(x, y)$ de $(*)$ satisfazendo a condição $F(0, y) = f(y)$, exibindo o gráfico da superfície integral usando o MAPLE.

b) Resolva a E.D.P. em três variáveis independentes

$$u_x + u_y + xyu_z = u^2$$

Encontre uma hipersuperfície integral de $\mathbb{R}^4$ dada por $u = u(x, y, z)$, passando por $(2, 1, 1, 4)$ e que contenha parte da superfície (x, y, y, x^2).

5) A seguinte equação diferencial parcial é proveniente de um problema de Geometria Diferencial

$$(px + py)^2 - a^2(p^2 + q^2) = 0$$

a) Desenvolva obtendo uma equação de segundo grau em p/q, e infira a sequinte equação diferencial linear homogênea

$$p(x^2 - a^2) + q\left(xy \pm a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right) = 0$$

b) Mostre que as equações características são

$$\mathrm{d}z = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{\mathrm{d}y}{xy \pm a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$$

c) Mostre que a última equação acima pode ser re-escrita como

$$(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)^2 - a^2\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) = 0$$

obtendo a equação de Clairaut

$$xy' - y = \pm a\sqrt{1 + y'^2}$$

d) Mostre que uma superfície integral é dada por

$$(x\psi(z) - y)^2 - a^2\left(1 + \psi^2(z)\right)^2 = 0$$

sendo ψ uma função arbitrária.

e) Mostre que o cilindro

$$x^2 + y^2 = a^2$$

é uma integral singular.

6) Resolva as E.D.P. quasilineares, verificando sua resposta.

a)

$$p - q + z = 1$$

b)

$$ap + bq = -cz$$

satisfazendo a condição $z(x, 0) = f(x)$, onde $f(t)$ é uma função dada. Exiba o gráfico da superfície integral usando o MAPLE.

c) Integre as equação abaixo por dois métodos distintos, sendo que um destes use obrigatoriamente a integração do sistema característico em função de um parâmetro t seguida pela eliminação do parâmetro. Exiba o gráfico da superfície integral usando o MAPLE.

i)

$$xp - yq = (y - x)z$$

com a superfície integral contendo a hipérbole
$z = 1, (x-1)(y-1) = 1$.

ii)

$$(x + 1)p + yq + x + y + z = 0$$

com a superfície integral contendo a reta $x = y, z = 1$.

iii)

$$xp + yq = 1 + y^2$$

com a superfície integral contendo a reta $z = x + 1, y = 1$.

7) Mostre que existe uma quádrica de $\mathbb{R}^3$ dada por uma função $z = z(x, y)$ satisfazendo a E.D.P. quasilinear

$$(2xy - 1)p + (z - 2x^2)q = 2(x - yz)$$

que contém a reta passando por $(1, 0, 0)$ com vetor diretor $(0, 0, 1)$, exibindo o gráfico da quádrica usando o MAPLE.

8) Encontre a superfície integral da equação diferencial parcial

$$x^3p + y(3x^2 + y)q = z(2x^2 + y)$$

contendo a parábola $x(s) = 1, y(s) = s, z(s) = s(1 + s)$, exibindo o gráfico da superfície integral usando o MAPLE.

BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.
2. Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel.* Hermann, Paris,1967.
3. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998
4. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.
5. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, 1979.
6. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles.* J. Gabay, 1989.
7. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academis Press, 1992.